

OM ROTATIONSYTORS DEFORMATION
TILL NYA ROTATIONSYTOR,
MED SÄRSKILDT AFSEENDE PÅ ALGEBRAISKA YTOR.

AKADEMISK AFHANDLING,
SOM FÖR ERHÅLLANDE AF FILOSOFISK DOKTORSGRAD MED VEDERBÖRLIGT TILLSTÅND
TILL OFFENTLIG GRANSKNING FRAMSTÄLLES

AF

TORSTEN BRODÉN,
FIL. LIC., VESTG.,

Å AUDITORIET N:o VI I LUND,
ONSDAGEN DEN 21 APRIL 1886 KL. 10 F. M.

LUND 1886,
FR. BERLINGS BOKTRYCKERI OCH STILGJUTERI.

Inledning.

1. Som bekant är GAUSS att anse som grundläggare af teorien för *ytors deformation*. Den enkla sats, som bildar utgångspunkten för nämnda teori, återfinnes i inledningen till den store matematikerns arbete: "Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird" ¹⁾. Gauss påpekar här, att om en yta är afbildad på en annan så, att alla oändligt små bågar, som utgå från en godtycklig punkt af den ena ytan och ligga helt och hållet i denna, äro proportionela mot sina afbildningar på den andra ytan, det då också nödvändigt gäller, att alla vinklar vid afbildningen förblifva oförändrade, och att följaktligen hvarje ytelement motsvaras af ett likformigt element. Detta visas analytiskt, på samma gång som sakens geometriska tydlighet framhålles. Sedan vidare anmärkts, att förhållandet (m) mellan hvarandra motsvarande bägelement i allmänhet icke kan vara öfver allt lika, utan måste variera från punkt till punkt, heter det slutligen: "in dem speciellen Falle, wo m constant ist, wird eine vollkommene Ähnlichkeit auch in den endlichen Theilen, und wenn überdiess $m = 1$ ist, wird eine vollkommene Gleichheit Statt finden, und die eine Fläche sich auf die andere abwickeln lassen."

Alltså: två ytor kunna deformerar till (appliceras på) hvarandra, om mellan deras punkter kan upprättas en *sådan motsvarighet, att motsvarande båglängder blifva öfverallt lika*. I öfverensstämmelse med Gauss' sätt att analytiskt formulera afbildningsfrågan, kunna vi analytiskt uttrycka villkoret sålunda: de rätvinkliga koordinaterna för ytornas punkter (x, y, z resp. ξ, η, ζ) skola kunna

¹⁾ C. F. Gauss' Werke. Göttingen 1880. Bd IV, pag. 193.

framställas medelst samma parametrar (r, t) på sådant sätt, att differentialuttrycken $dx^2 + dy^2 + dz^2$ och $d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$, transformerade till expressioner i r och t , blifva identiskt lika.

2. Vi antaga nu en *rotationsyta* gifven och fråga, till hvilka *nya rotationsytor* den kan deformerar. Frågan är förut vidrörd af andra författare, särskildt af Bour¹⁾; men en fullständigare behandling, med särskild hänsyn till algebraiska rot.-ytor, torde icke sakna sitt intresse.

Den gifna ytans rotationsaxel må tagas till z -axel i ett rätvinkligt koordinatsystem. Koordinaterna för ytans punkter kunna då på följande sätt uttryckas medelst två parametrar r och t :

$$\begin{aligned} x &= r \cos t \\ y &= r \sin t \quad (1), \\ z &= f(r) \end{aligned}$$

om nämligen den genererande kurvan ("meridianen"), tänkt belägen i xz -planet, representeras af ekvationen $z = f(x)$ — eller $z = f(-x)$ — samt r betyder abscissan för den punkt af kurvan $z = f(x)$, som vid kurvans rotation ger upphof åt ytpunkten (x, y, z) , och t den vinkel, som kurvan $z = f(x)$ behöfver vridas, för att läget (x, y, z) skall komma att intagas af den motsvarande punkten på nämnda kurva (hvarvid vinkeln räknas positiv i samma riktning som vid vanligt användande af polarkoordinater i xy -planet). Koordinaterna för en af de sökta ytorna tänka vi oss på samma sätt framställda medelst tre ekvationer

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi \cos \Theta \\ \eta &= \varphi \sin \Theta \quad (2) \\ \zeta &= \varphi(\varrho) \end{aligned}$$

Kurvorna $z = f(x)$ och $\zeta = \varphi(\xi)$ benämna vi korteligen resp. f - och φ -kurvan, de tillhörande ytorna f - och φ -ytan.

3. Skola nu ytorna f och φ kunna deformerar till hvarandra, måste ϱ och Θ kunna uttryckas som funktioner af r och t på sådant sätt, att i nedan stående, ur (1) och (2) härledda ekvationer högra membra blifva identiskt lika:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = [1 + f'^2(r)] dr^2 + r^2 dt^2 \quad (3)$$

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = [1 + \varphi'^2(\varrho)] d\varrho^2 + \varrho^2 d\Theta^2 \quad (4)$$

Nämnda identitet kommer, som vi se, till stånd, om man sätter

¹⁾ I den stora afhandlingen: *Théorie de la déformation des surfaces*, Journal de l'école polytechnique, Tome XXII, cahier 39, pag. 82 ff.

$$\varrho = kr \quad (5)$$

$$\Theta = \pm \frac{t}{k} + C \quad (6)$$

(k och C godtyckliga konstanter), i händelse

$$k^2 [1 + \varphi'^2(\varrho)] = 1 + f'^2\left(\frac{\varrho}{k}\right)$$

d. v. s.

$$\varphi(\varrho) = \frac{1}{k} \int \sqrt{1 - k^2 + f'^2\left(\frac{\varrho}{k}\right)} d\varrho \quad (7)$$

Ekv. (7) bestämmer sålunda en rot-yta, på hvilken f -ytan låter applicera sig, under det (5) och (6) ange det sätt, hvarpå ytornas punkter motsvara hvarandra i den meningen, att de vid applikationen sammanfalla.

4. Medelst en bekant sats kan lätt visas, att det i själfva verket är den *generela* lösningen till det ifrågavarande problemet, vi sålunda erhållit — bortsett likväl från det fall, att den gifna ytan har *konstant "krökningsmått,"* ett fall som längre fram skall särskildt behandlas. Med krökningsmättet i en punkt af en yta menas det inversa värdet af de principiale krökningsradiernas produkt ¹⁾. Som bekant förblir, såsom Gauss visat, denna kvantitet öfver allt oförändrad, när ytan böjes ²⁾. En på ytan belägen kurva, längs hvilken krökningsmättet är konstant, bibehåller därför vid hvarje böjning denna egenskap. Men på alla ytor, som icke hafva krökningsmättet öfver allt lika, finnes ett enkelt oändligt antal kurvor, längs hvilka det har konstant värde, och hvad rotationsytorna angår, äro dessa kurvor parallelcirklarna (såsom omedelbart inses och lätt analytiskt verifieras). Häraf följer, att om rot-ytorna med konstant krökningsmått undantagas, det måste gälla, att när en rot-yta deformeras till en ny sådan, parallelcirklarna förblifva parallelcirklar. Detta hafva vi analytiskt att uttrycka så, att $\frac{d\varrho}{dt} = 0$. Ty det betyder, att $r =$ en konstant motsvaras af $\varrho =$ en konstant, hvaraf följer, att ϱ är oberoende af t . Men identiteten mellan högra membra i (3) och (4) fordrar (på grund af den ortogonala skärningen mellan parallelcirklar och meridianer), att när $\frac{d\varrho}{dt} = 0$, äfven $\frac{d\Theta}{dr} = 0$, hvilket uttrycker, att meridianerna förblifva meridianer. Återstår, att uttrycket

¹⁾ Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, Schriften Bd IV pag. 231.

²⁾ Anf. st. pag. 235.

$$[1 + \varphi'^2(\varrho)] \left(\frac{d\varrho}{dr}\right)^2 dr^2 + \varrho^2 \left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 dt^2$$

skall reducera sig till högra membrum i (3). Härför fordras för det första, att $\left(\frac{d\Theta}{dt}\right)^2 = \frac{r^2}{\varrho^2}$. Deraf följer åter, eftersom $\frac{d\Theta}{dt}$ ej kan vara funktion af r , att $\frac{\varrho}{r}$, som icke får innehålla t , måste vara oberoende äfven af r och således konstant. Man finner, att ekv. (5), (6), (7) återfås.

5. Vi vilja omedelbart af dessa ekvationer draga vissa allmänna slutsatser.

Konstanten C har uppenbarligen ingen betydelse i och för den egentliga deformationen utan afser blott den deformerade ytans *läge*, i det dess variation betecknar en vridning kring rot-axeln. Om integrationskonstanten i (7) skall längre fram något talas. Det dubbla tecknet i (6) anger möjligheten af hela ytans *vrängning*. Konstanten k kunna vi en gång för alla antaga *positiv*¹⁾; dess förändring blott till tecknet innebär nämligen, om tillika tecknet i (6) ändras, samt C ökas med π , endast det, att den mot $\varphi = 0$ svarande meridianen till den nya ytan skall anses vara $\xi = \varphi$ ($-\xi$) i st. f. $\xi = \varphi(\xi)$. Men mot numeriskt olika k -värden svara tydligtvis olika deformationer, och det finnes derföre ett enkelt oändligt antal sådana. Denna omständighet sammanhänger i själfva verket på det närmaste dermed, att en rot-ytas ena system "krökningslinier" sammanfaller med kurvorna för konstant krökningsmått (hvaraf följer, att vid deformation till en ny rot-yta krökningslinierna förblifva krökningslinier), medan deremot det andra systemet krökn.-linier tillika är ett system "geodetiska linier"²⁾.

6. Beträffande deformationens allmänna förlopp anger ekv. (5), att parallell-cirklarna skola öfvergå till nya sådana med i konstant förhållande (k) ökad eller minskad radie, d. v. s. till cirkelbågar mindre ($k > 1$) eller större ($k < 1$) än en hel periferi. När $k > 1$, kallas deformationen i det följande *utvidgning*, när $k < 1$ *sammandragning*. Tydligt är, att vid deformationens mekaniska utförande ytan måste uppskäras längs någon kurva, som råkar alla par.-cirklarna, liksom att den nya yta, som vid utvidgning bildas, är ofullständig så till vida, att den utgör blott $\frac{1}{k}$ af den yta, som uppstår, när den nya meridianen roterar

¹⁾ *Imaginära* k -värden kunna på grund af ekv. (5) och (6) omöjligt motsvara verkliga deformationer, ehuru det ingalunda är otänkbart, att de gifva reela φ -ytor.

²⁾ Se ang. dessa förhållanden A. ENNEPER, Untersuchungen über einige Punkte aus der allgemeinen Theorie der Flächen, Math. Annalen Bd II, pag. 604 ff.

ett helt hvarf, medan deremot vid sammandragning redan en del af den gifna ytan (k ggr densamma) ger upphof till en i nu i fråga varande mening fullständig ny rot-yta.

7. Den nya meridian-kurvan bestämmes af ekvationerna

$$\zeta = \varphi(kx) = \int u dx,$$

$$\xi = kx,$$

hvarest

$$u = \sqrt{1 - k^2 + f'^2(x)}$$

Då $k < 1$, blir u alltid reelt, såvida $f'(x)$ är reelt, och följaktligen kan man då alltid erhålla en reel φ -båge svarande mot en reel f -båge. Är deremot $k > 1$, blir u imaginärt, om $f'^2(x) < k^2 - 1$, och mot de delar af f -kurvan, der $f'(x)$ satisfierar denna olikhet, kunna därför icke svara några reela φ -partier. Vid den gifna ytans utvidgning måste man därför borttaga de fält af ytan, i hvilka den spetsiga vinkeln mellan normalen och rot.-axeln understiger en viss gräns ($\arctg \sqrt{k^2 - 1}$ ell. $\arccos \frac{1}{k}$); om meridianen icke har någon reel (ändlig eller oändlig) tangent parallel med rot.-axeln, kommer därför mot tillräckligt stora k -värden icke att svara någon deformation alls.

8. Beträffande funktionens φ allmänna natur må här följande anmärkningar göras. Emedan den ofvanstående integralens "fundamentalkurva" [(x, u) -kurvan] åtminstone vid godtyckligt k -värde är symmetrisk i afseende på x -axeln¹⁾ måste funktionen $\varphi(\xi)$ vid godt. k vara *symmetrisk* i afseende på en (reel eller imaginär) linie parallel med ξ -axeln, eller annorlunda uttryckt ξ vara jämn funktion af (φ + en konst). Härmed sammanhänger vidare, att deformationsintegralen i allmänhet har *flere perioder* än $\int f'(x) dx$. Det är gifvet, att på grund af dessa förhållanden en fullt godtyckligt vald rot.-yta kommer att i vissa afseenden intaga en undautagsställning i det system af på hvarandra applicabla rot.-ytor, till hvilket den hör.

Då vi tala om $\varphi(\xi)$ såsom en fullt bestämd funktion, måste vi naturligtvis förutsätta, att begynnelsevärdena vid den integration, hvarigenom φ erhålles, blifvit valda på ett bestämdt sätt. Begynnelsevärdena för ξ och u kunna vi en gång för alla välja godtyckligt: genom att endast variera begynnelsvärdet för φ ("integrationskonstanten"), erhåller man alla de i viss mån olika φ -funk-

¹⁾ Ett utfördt bevis härför, tydligen gällande oberoende deraf, om f är algebraisk eller icke, lämnas längre fram § 29.

tioner, som den obestämda integraten $\int_k^u d\xi$ innefattar. Det är ganska tydligt, att man alltför väl kan behöfva använda flera af dessa q -funktioner, för att vid alla delar af f -kurvan, som öfverhufvud kunna ge upphof till reela q -bågar, verkligen erhålla motsvarande dylika. Ty vare sig emedan kurvan f består af skilda partier utan reelt sammanhang, eller emedan vid vissa sträckor af densamma de tillhörande u -värdena blifva imaginära, kan nämligen (ξ, u) -kurvan komma att bestå af olika delar, som icke stå i något reelt sammanhang med hvarandra. Men "integralkurvan" till en sådan kurva utgöres, såsom ytterst lätt inses, i regeln af flera skilda kurvpartier, hvilka hvar för sig äro att anse som afslutade kurvor, emedan de svara mot olika värden på integrationskonstanten, differerande på imaginära kvantiteter ¹⁾. Detta kan sålunda inträffa äfven med " q -kurvan": den nya meridianen är ofta sammansatt af flera olika " q kurvor," hvilka öfvergå i hvarandra vid imaginära förskjutningar längs rotationsaxeln. I sammanhang härmed må också påpekas, att i vissa fall en dylik förskjutning — i likhet med hvarje *reel* förändring af integrationskonstanten — endast innebär öfvergång till en kongruent och mot samma f -parti svarande kurva: detta blir uppenbarligen fallet, dels om integrationskonstanten ökas med den imaginära termen i en period för integralen, dels om den i fråga varande q -kurvan är symmetrisk i afseende på en imaginär linie $\xi = a - \frac{1}{2} bi$ samt för samt förskjutes stycket bi , hvarvid den öfvergår i en symmetriskt motsvarig kurva, eller s. a. s. vändes upp och ned.

Det är vidare mycket möjligt, att den nya meridiankurvan blir ur analytisk synpunkt *ofullständig*, i det den utgör blott delar af en eller flera fullständiga q -kurvor. Om (då $k < 1$) för några reela x -värden vissa af värdena på $f'(x)$ äro rent imaginära och till sitt absoluta belopp mindre än $\sqrt{1-k^2}$, blifva de tillhörande u -värdena reela, och man kan därför också erhålla reela q -bågar, som icke motsvara några reela f -bågar (detta är tydligen endast s. a. s. en omvändning af den förut anmärkta möjligheten, att, då $k > 1$, vissa delar af f -kurvan gifva imaginärt u : vi hafva här blott låtit f - och q -kurvorna byta roller). Om nu ett sådant q -parti icke ensamt utgör en fullständig q -kurva, utan först tillsammans med kurvsträckor, som härröra från reela f -partier, bildar en dylik, så blir häraf tydligen en följd, att den nya meridian, som vid f -ytans

¹⁾ Stundom, men icke alltid, blir detta en följd äfven deraf, att vissa kurvpartier "sammanhänga endast genom oändligheten." Jfr den följande undersökningen.

deformation erhålles, är på nyss nämnda sätt ofullständig. (Samma förhållande kan äfven vara en följd deraf, att för vissa reela x -värden $f'(x)$ har reela värden, under det $f(x)$ är imaginärt, förutsatt tillika att de tillhörande u -värdena äfven blifva reela. Den gifna kurvan är då sjelf en sådan, som vid vissa imaginära förskjutningar längs z -axeln öfvergår i en ny reel kurva; är f -kurvan algebraisk, kan sådant naturligtvis icke komma i fråga). En analytisk ofullständighet hos den nya meridianen kan slutligen bero derpå, att q -kurvorna äro reelt symmetriska eller reelt periodiska och sålunda bestå af två eller oändligt många kongruenta delar, utan att detsamma är fallet med kurvan f . Såsom i det följande skall visa sig, äro q -kurvorna vid tillräckligt stora k -värden verkligen alltid reelt symmetriska.

9. Af ekv. $\xi = kx$, $\zeta = \int u dx$ sluter man med lätthet till det anmärkningsvärda förhållandet, att om den gifna meridianen är $z = f(x - c)$ i st. för $z = f(x)$, q kurvorna blifva $\zeta = q(\xi - kc)$ i st. f. $\zeta = q(\xi)$, m. a. o., att *mot en förskjutning af kurvan f vinkelrätt mot rot.-axeln svarar en k ggr så stor förskjutning af q -kurvorna*. I följd häraf står hvarje system på hvarandra applicabla rot-tytor i ett högst enkelt samband med oändligt många andra dylika.

10. Såsom Bour påpekat, äger det rätt intressanta förhållandet rum, att *den del af en godtycklig meridiantangent, som ligger mellan kontaktpunkten och rot.-axeln, vid böjningen förblir konstant*. Vi hafva, om α och α' betyda vinklarna mellan rot.-axeln samt en f -tang. resp. motsvarande q -tangent

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2 = \cot^2 \alpha' = \frac{1}{k^2} (1 - k^2 + \cot^2 \alpha)$$

och följaktligen

$$\frac{1 + \cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha'} = \frac{\sin^2 \alpha'}{\sin^2 \alpha} = k^2.$$

Det stycke af f -tangenten i punkten (x, z) , som ligger mellan denna punkt och rot.-axeln, är (om $x > 0$) $x : \sin \alpha$; motsvarande q -tangentstykke är $\xi : \sin \alpha' = kx : k \sin \alpha = x : \sin \alpha$. Härmed är den nämnda satsen bevisad.

Ekv. $\sin \alpha' = k \sin \alpha$ har, såsom Bour äfven påpekat, alldeles samma form som den, hvilken bestämmer en *refraktionsbränlinie* till en gifven kurva. *B.* säger vidare, att mellan refraktionsbränlinierna och de kurvor, som vi benämna q -kurvor, råder ett på nämnda förhållande grundadt samband, hvarigenom han satts i stånd att af kända egenskaper hos de först nämnda kurvorna sluta till vissa motsvarande egenskaper hos de senare. En närmare redogörelse för hithörande frågor utlofvas till en följande cahier af journalen, men har, så-

vidt jag kunnat finna, aldrig influat. Ej håller har jag själf närmare reflekterat öfver det nämnda sambandet, som visserligen i och för sig kan hafva ett visst intresse, men svårligen är egnadt att leda till en fullständigare kännedom om φ -kurvornas viktigare egenskaper, än den mer direkta väg, som vi i det följande skola beträda.

11. Deremot kommer en annan af Bour anmärkt omständighet att blifva af en viss betydelse för den följande framställningen. Substitueras

$$f(x) = z = v \sqrt{1-k^2},$$

erhåller man

$$\varphi(kx) = \sqrt{1-k^2} \int dx \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2}.$$

Men högra membrum i denna ekv. skiljer sig blott på en konstant faktor från uttrycket för *båglängden* af den kurva, till hvilken kurvan f öfvergår vid substitutionen $z = v \sqrt{1-k^2}$. Frågan om de nya ytornas beskaffenhet låter således reducera sig till frågan om *rektifikationen* af vissa kurvor, som stå i ett enkelt förhållande till den gifna ytans meridian. Likväl bör observeras, att dessa kurvor — som i det följande benämnas v -kurvorna — vid k -värden större än 1 i allmänhet icke äro reela, äfven om kurvans f är det, hvilket här alltid antages.

Frågan om *algebraiska* kurvors rektifikation har blifvit utförligt behandlad af J. M. LOVÉN i en afhandling "Om plana algebraiska kurvors rektifiabilitet," Lunds universitets årsskrift 1881—82. Till detta arbete kommer därför i det följande flerstädes att hänvisas, liksom också vissa delar af den följande framställningen ganska nära öfverensstämma med den Lovén'ska.

Om φ -kurvornas singulariteter.

12. Till en början skola vi nu undersöka, hvilka φ -singulariteter motsvara olika f -singulariteter. Härvid inskränka vi oss likväl till det fall, att samtliga f -singulariteter äro af *algebraisk natur*, d. v. s. att funktionen f icke på hela den Riemann'ska sfären har några andra singulära ställen än algebraiska kritiska punkter och poler.

I § 3—§ 18 af den nyss nämnda afhandlingen undersöker Lovén det sätt, hvarpå singulariteterna hos fundamentalkurvan till en gifven algebraisk kurvas rektifikationsintegral (" $F(x, u)$ -kurvan") motsvara den gifnas. Enligt C. F. E. BJÖRLINGS föredöme karakteriseras härvid hvarje genom en viss punkt gående,

ej genom Newton-Cramerska regeln sönderdelbar gren af kurvan medelst tvenne indices (m, n) , utmärkande antalet i punkten i fråga sammanfallande skärningspunkter mellan kurvgruppen samt å ena sidan en godtycklig rät linie genom punkten, å andra sidan grenens tangent. Likaså begagnas den äfven af Björling vid liknande undersökningar använda metoden, att koordinaterna för de olika grenarna af den gifna kurvan uttryckas medelst dignitetsserier af en parameter, gällande inom ett visst område, samt derefter en liknande framställning härledes för motsvarande grenar af den i fråga varande nya kurvan ¹⁾.

För att besvara frågan om våra (x, u) -kurvors singulariteter behöfver man nu, på grund af hvad i slutet af inledningen anfördes, endast i Lovéns under-

sökning öfver allt substituera $\frac{u}{\sqrt{1-k^2}}$ för u samt $\frac{\lambda}{\sqrt{1-k^2}}$ för λ (tangentvinkelkoefficienten för den i fråga varande grenen af den gifna kurvan). (Huruvida kurvan f är algebraisk eller icke, är härvid naturligtvis ligkiltigt, så länge blott de särskilde ifrågakommande singulariteterna äro af algebraisk natur.) Den följande framställningen förutsätter emellertid icke ett fullständigt utredande af denna fråga.

I detta kapitel skola vi, oberoende af det Lovénska arbetet, ur f -grenarnas parameterframställningar härleda parameter-uttryck för u , men derpå, utan att närmare göra oss reda för (x, u) -singulariteternas beskaffenhet, genom integration öfvergå till φ -grenarnas parameterframställning. Härvid är att märka, att vid vissa (oändliga) f -grenar de tillhörande φ -grenarna icke låta uttrycka sig medelst dignitetsserier af parametern, emedan vid integrationen en logaritmterm tillkommer.

13. Vi betrakta först

1) *Ändliga f -punkter.* Vi kunna vid dem alltid antaga, att x -axeln går genom den i fråga varande punkten; en förskjutning af kurvan f i z -riktningen inverkar nämligen icke på värdena af ζ och ξ .

A) Är tangentvinkelkoefficienten λ *ändlig*, låter f -grenen, om dess indices äro m, n , framställa sig medelst en parameter α sålunda

$$x = x' + \alpha^m, \quad z = \lambda \alpha^m + A \alpha^n + B \alpha^{n+1} + \dots$$

(x' punktens abscissa, $A \neq 0$, liksom alltid i det följ.) För att uttrycka u medelst α derivera vi uttrycken för x och z :

¹⁾ Se BJÖRLING, Über entsprechende Singularitäten in algebr. ebenen Curven.

$$\frac{dx}{d\alpha} = m \alpha^{m-1}, \quad \frac{dz}{d\alpha} = m \lambda \alpha^{m-1} + n A \alpha^{n-1} + (n+1) B \alpha^n + \dots$$

Häraf följer

$$\frac{dz}{dx} = \lambda + n A \alpha^{n-m} + (n+1) B \alpha^{n-m+1} + \dots$$

$$\begin{aligned} u^2 &= 1 - k^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \\ &= 1 - k^2 + \lambda^2 + 2 \lambda \alpha^{n-m} [n A + (n+1) B \alpha + \dots] \\ &\quad + \alpha^{2(n-m)} [n A + (n+1) B \alpha + \dots]^2. \end{aligned}$$

a) Under förutsättning, att $1 - k^2 + \lambda^2 \neq 0$, erhålles härur

$$\begin{aligned} \pm u &= \sqrt{1 - k^2 + \lambda^2} + \frac{\lambda \alpha^{n-m}}{\sqrt{1 - k^2 + \lambda^2}} [n A + (n+1) B \alpha + \dots] \\ &+ \frac{\alpha^{2(n-m)}}{2 \sqrt{1 - k^2 + \lambda^2}} \left(1 - \frac{\lambda^2}{1 - k^2 + \lambda^2}\right) [n A + (n+1) B \alpha + \dots]^2 + \dots \end{aligned}$$

För att uttrycka φ -ordinaten (ζ) medelst α , har man att utföra integrationen $\int u dx = m \int \alpha^{m-1} u d\alpha$. Man erhåller

$\pm \zeta = \alpha^m \sqrt{1 - k^2 + \lambda^2} + \lambda \alpha^n (L + M \alpha + \dots) + \alpha^{2n-m} (B + Q \alpha + \dots)$,
hvarrest $L, M \dots P, Q \dots$ äro vissa konstanter, af hvilka $L \neq 0, P \neq 0$, liksom alltid i det följande ¹⁾.

För φ -abscissan gäller

$$\xi = kx = kx' + k\alpha^m.$$

Såsom var att vänta, erhållas således vid godtyckligt λ -värde två φ -grenar med indices m, n och tang.-vinkelkoeff $\pm \frac{1}{k} \sqrt{1 - k^2 + \lambda^2}$.

14. Om $\lambda = 0$, blifva indices deremot i allmänhet $m, 2n - m$. Mot parabelgrenar (m udda, n jämt) svara således vid tangering af x -axeln inflexioner på φ (bägge indices udda); mot inflexioner på f likaså; fig. 1, 2, 3. Spets på f (m jämt) ger på φ "snabelspets" (bägge indices jämna); fig. 4, 5, 6. Härifrån gör endast det fall ett undantag, då f -spetsen är *symmetrisk*, d. v. s. då m är jämt, men n och alla högre exponenter i z -uttrycket udda. I detta fall blifva, såsom lätt inses, alla α -exponenter i ξ och ζ -uttrycken jämna, man kan sätta $\alpha^2 = \beta$ utan att erhålla brutna exponenter och indices komma att half-

¹⁾ I det vid integrationen icke tillfogas någon konstant term, tänka vi oss, att hvardera φ -punkten är belägen på ξ -axeln; naturligtvis kan detta i allmänhet icke samtidigt vara fallet, om de bägge grenarna tillhöra samma φ -kurva.

veras, sålunda blifva $\frac{1}{2}m, n - \frac{1}{2}m$; φ -grenarna äro parabelgrenar eller spetsar, allteftersom $\frac{1}{2}m$ är udda eller jämt; fig. 7, 8, 9; de å fig. prickade halfgrenarna motsvara imaginära f -punkter.

15. Vi hafva hittills uteslutit det fall, då $1 - k^2 + \lambda^2 = 0$, d. v. s. $\lambda = \pm i \sqrt{1 - k^2}$. Man har då (se ofvan)

$$\pm u = \alpha^{\frac{1}{2}(n-m)} (\sqrt{2n\lambda A} + R) \quad (R \text{ en viss serie})$$

$$\pm u dx = \alpha^{\frac{1}{2}(n+m)-1} (\sqrt{2n\lambda A} + R) da$$

$$\pm \xi = \frac{2m}{n+m} \alpha^{\frac{1}{2}(n+m)} (\sqrt{2n\lambda A} + S) \quad (S \text{ en viss serie})$$

hvarjämte som förut

$$\xi = kx' + k\alpha^m.$$

q -tangenten är således parallel med ξ -axeln, och q -indices $m, \frac{1}{2}(n+m)$, om $n+m$ är jämt tal. Är deremot $n+m$ udda, substituera vi $\alpha = \beta^2$ och erhålla såsom indices $2m, n+m$; tillika observera vi, att exponenten för β i ξ -uttrycket ($2m$) blir jämn, men alla eponenterna i ξ -uttrycket udda, hvilket innebär, att de båda q -grenarna sammanfalla till en enda *symmetrisk* gren. — Dessa resultat hade lätt kunnat förutses: de innehålla näml. alldeles detsamma, som de under antagandet $\lambda = 0$ erhållna, ehuru i s. a. s. omvänd form, i det att f - och φ -grenarna bytt roller; jfr. fig. 1—9.

12. B) Det fall återstår nu att betrakta, då $\lambda = \infty$, d. v. s. f -tangenten parallel med z -axeln. Vi skriva då $x = x' + \alpha^n$, $z = A\alpha^m + B\alpha^{m+1} + \dots$ och härleda med lätthet

$$\pm u = F\alpha^{-(n-m)} + G\alpha^{-(n-m-1)} + \dots F \neq 0$$

$$\xi = kx' + k\alpha^n, \pm \zeta = L\alpha^m + M\alpha^{m+1} + \dots,$$

hvaraf synes, att såväl indices som tangentriktning förblifva oförändrade. Tillika må påpekas, att man erhåller en enda, *symmetrisk* φ -gren, då f -grenen själf är symmetrisk i afs. på x -axeln.

17. Vi antaga nu

2) f -grenen *oändlig med ändlig tangent*.

A) Är *asymptoten icke parallel med z -axeln*, tänka vi oss alltid f -kurvan förskjuten i z -riktningen, så att asymptoten kommer att gå genom origo (jfr ofvan). Om asymptoten är $z = \lambda x$, och $w = 0$ betyder ∞ -linien, kan den oändliga grenen i homogena koordinater representeras sålunda:

$$\frac{x}{1} = \frac{z}{\lambda + A\alpha^n + B\alpha^{n+1} + \dots} = \frac{w}{\alpha^m}.$$

Vi hafva nu att räkna med $\frac{x}{w}$ och $\frac{z}{w}$ såsom förut med x och z . Man erhåller

$$\begin{aligned} u^2 &= 1 - k^2 + \left[\frac{d \frac{z}{w}}{d \frac{x}{w}} \right]^2 \\ &= 1 - k^2 + \frac{\alpha^{2(m+1)}}{m^2} \left[-\frac{m\lambda}{\alpha^{m+1}} + (n-m) A\alpha^{n-m-1} + (n-m+1) B\alpha^{n-m} + \dots \right]^2 \\ &= 1 - k^2 + \frac{1}{m^2} [-m\lambda + (n-m) A\alpha^n + (n-m+1) B\alpha^{n+1} + \dots]^2 \\ &= 1 - k^2 + \lambda^2 - \frac{2\lambda}{m} \alpha^n [(n-m) A + (n-m+1) B\alpha + \dots] \\ &\quad + \frac{\alpha^{2n}}{m^2} [(n-m) A + (n-m+1) B\alpha + \dots]^2 \end{aligned}$$

18. a) Antages $1 - k^2 + \lambda^2 \neq 0$, följer häraf

$$\begin{aligned} \pm u &= \sqrt{1 - k^2 + \lambda^2} - \frac{\lambda \alpha^n}{m \sqrt{1 - k^2 + \lambda^2}} [(n-m) A + (n-m+1) B\alpha + \dots] \\ &\quad + \frac{\alpha^{2n}}{2 m^2 \sqrt{1 - k^2 + \lambda^2}} \left(1 - \frac{\lambda^2}{1 - k^2 + \lambda^2} \right) [(n-m) A + (n-m+1) B\alpha + \dots]^2 \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pm \xi &= \pm \int u d \left(\frac{x}{w} \right) = \mp \int \frac{u}{\alpha^{m+1}} d\alpha \\ &= \frac{1}{\alpha^m} \sqrt{1 - k^2 + \lambda^2} + \lambda \alpha^{n-m} [L + M\alpha + \dots] + \alpha^{2n-m} [P + Q\alpha + \dots] \end{aligned}$$

I homogena koordinater blifva således φ -grenarna

$$\frac{\xi}{k} = \frac{\pm \xi}{\sqrt{1 - k^2 + \lambda^2 + \lambda \alpha^n (L + M\alpha + \dots) + \alpha^{2n} (P + Q\alpha + \dots)}} = \frac{w}{\alpha^m}$$

(om integrationskonstanten liksom ofvan bortlemnas). Äfven φ -tangenterna blifva således ändliga, samt i händelse $\lambda \neq 0$, indices oförändrade.

Om $\lambda = 0$, blifva de nya indices i allmänhet $m, 2n$ (fig. 10—15), men $\frac{1}{2}m, n$ om f -grenen är symmetrisk i afs. på x -axeln, hvaraf följer, att alla α -exponenterna i ξ - och w -uttrycken blifva jämna (se ofvan vid ändliga f -grenar); fig. 16—18.

19. b) Är $\lambda = \pm i \sqrt{1-k^2}$, komma φ -grenarna att gå genom $\zeta = w = 0$, och man bör erhålla de under antagandet $\lambda = 0$ funna resultaten i omvänd form, under förutsättning likväl, att man betraktar endast sådana f -grenar, hvilkas indexdifferens är större än mindre index, hvilket alltid är fallet vid de strax ofvan erhållne φ -indices $(m, 2n$ resp. $\frac{1}{2}m, n)$; i öfriga händelser fås deremot nu genom $\zeta = w = 0$ gående φ -grenar, som icke hafva ändlig tangent eller icke ens äro af algebraisk natur. Man har i själfva verket

$$\pm \int u d\left(\frac{x}{w}\right) = m \int a^{\frac{1}{2}n-m-1} (F + Ga + \dots) \quad (F, G \dots \text{ vissa konst.})$$

20. b₁) Först må antagas, att n är jämt.

Om då $n > 2m$, finnes i serien under integraltecknet ingen term $K\alpha^{-1}$, vid integrationen uppstår därför lika litet som i de förut betraktade fallen någon transcendent term, och φ -grenarna blifva

$$\frac{\xi}{k} = \frac{\pm \zeta}{L\alpha^{\frac{1}{2}n} + M\alpha^{\frac{1}{2}n+1} + \dots} = \frac{w}{\alpha^m}$$

hvilket, som man lätt finner, stämmer med det föreg.

Om deremot $n = 2m$, är första termen i serien $F\alpha^{-1}$, och φ -grenarna komma att uttryckas sålunda:

$$\frac{\xi}{k} = \frac{\pm \zeta}{L\alpha^m \log \alpha + M\alpha^{m+1} + \dots} = \frac{w}{\alpha^m}$$

Dessa grenar tangeras af ∞ -linien, emedan $\lim_{\alpha=0} w : \zeta = 0$. Man inser vidare

lätt, att eftersom n är jämt, $f(x)$ måste på bägge f -halfgrenarna ¹⁾ vara numeriskt större eller på bägge numeriskt mindre än $\sqrt{k^2-1}$, och att således bägge eller intetdera af de från dessa halfgrenar härrörande ytpartierna få vid deformationen (utvidgningen) medtagas. Det är likväl tydligt, att ξ -uttrycket, om seriens koefficienter äro reela, blir reelt endast för positiva α -värden, och att således den till negativa α hörande f -halfgrenen motsvaras af ett imaginärt φ -parti. Men tillfogar man vid integrationen en imaginär konstant $\pm L\pi i$ eller udda mångfald deraf, så att φ -grenarna blifva t. ex.

$$\frac{\xi}{k} = \frac{\pm \zeta}{L\alpha^m (\log \alpha - \pi i) + M\alpha^{m+1} + \dots} = \frac{w}{\alpha^m},$$

inträder ett motsatt förhållande: blott negativa α gifva reela φ -punkter. Om nu de kongruenta φ -bågar, som på hvardera stället motsvara olika tecken för ξ , tillhöra samma — således reelt symmetriska — φ -kurva, komma på grund

¹⁾ Om vi tänka oss grenen reel, hvilket, emedan $\lambda = \pm \sqrt{k^2-1}$ innebär, att $k > 1$.

af nämnda förhållande två φ -grenar, som svara mot olika f -halfgrenar att tillhöra skilda kurvor, öfvergående i hvarandra vid förskjutningen $L\pi i$ längs ξ -axeln, under förutsättning att $L\pi i$ icke är period för $\int u dx$ eller skiljer sig från en sådan med en reel term. Äger deremot reel symmetri icke rum, kan det alltför väl hända, att två till olika α -tecken hörande φ -grenar ligga på samma kurva, äfven utan att $L\pi i$ har nyss nämnda egenskap; de svara då mot olika tecken för ξ , och kurvan "vändes upp och ned" vid förskjutningen $L\pi i$; om m är udda, erhålla de båda grenarna det å fig. 20 angifna läget i förhållande till hvarandra; att detta ganska väl öfverensstämmer med den föregående undersökningens resultat, inser man lätt genom att exempelvis antaga sammanhängande f -partier af bestämdt utseende gifna samt tillämpa hvad vi förut lärt oss; är m jämt, skulle φ -grenarna komma att ligga såsom å fig. 22; men detta fall torde åtminstone vara ganska sällsynt: de två grenarna kunna, då m är jämt, åtm. i allmänhet ej gärna tillhöra samma kurva, emedan de då borde tillsammans hafva utseendet af en snabelspets (såsom å fig. 33).

Antaga vi slutligen $n < 2m$ (n fortfarande jämt tal), erhålles (c helt tal eller 0)

$$\frac{\xi}{k} = \frac{\pm \xi}{L\alpha^{\frac{1}{2}n} + M\alpha^{\frac{1}{2}n+1} + \dots + P\alpha^m (\log \alpha + c\pi i) + Q\alpha^{m+1} + \dots} = \frac{w}{\alpha^m}$$

Här kan P vara 0, och grenarna blifva då algebraiska med indices $\frac{1}{2}n, m$, tangerande ∞ -linien, fig. 23—30.

Om när detta icke är händelsen, f -halfgrenarne (antagna reela) likväl motsvaras af φ -bågar tillhörande samma (ej reelt symm.) kurva, bära dessa bågar (åtm. såvida ej $P\pi i$ är imag. term i en period, se strax ofvan) i förhållande till hvarandra ligga såsom å fig. 31—34 (sål. tillsammans hafva utseendet af en gren med indices $\frac{1}{2}n \pm 1, m$). Detta torde likväl (jfr ofvan) blott undantagsvis kunna inträffa, när $\frac{1}{2}n$ är jämt (fig. 23, 32, 29, 34); å andra sidan kan, när $\frac{1}{2}n$ är udda (fig. 23, 27) P i allmänhet svårligen blifva 0, utan att reel symmetri inträder, och sål. φ -bågar finnas, hvilka till hvarandra ligga såsom å figur 31, 33. — Ett särskildt anmärkningsvärdt fall, då nödvändigt $P=0$, är det då m är udda, $\frac{1}{2}n$ jämt, samt f -halfgrenarna äro kongruenta; emedan då alla α -eponenterna i uttrycken för f -koordinaterna äro udda, komma, såsom man lätt finner, i ξ -serien endast att ingå jämna α -digniteter, och följaktligen α^m saknas.

21. b₂) Är n udda, erhåller man genom att sätta $\alpha = \beta^2$, en *symmetrisk* φ -gren af alg. karakter:

$$\frac{\xi}{k} = \frac{L \beta^n + M \beta^{n+2} + \dots}{\beta^{2m}} = \frac{w}{\beta^{2m}}$$

Om $n > 2m$, är tangenten ändlig; se fig. 16, 18. Om $n < 2m$, är ∞ -linien tangent; fig. 35, 37.

22. B) Om f -asymptoten är parallel med z -axeln ($\lambda = \infty$), kan man sätta

$$\frac{x}{x' \cdot \alpha^m + \alpha^n} = \frac{z}{A + B\alpha + C\alpha^2 + \dots} = \frac{w}{\alpha^m} \quad ^1),$$

hvarur härledes

$$\begin{aligned} u^2 &= 1 - k^2 + \frac{1}{(n-m)^2 \alpha^{2(n-m-1)}} [m \frac{A}{\alpha^{m+1}} + (m-1) \frac{B}{\alpha^m} + \dots]^2 \\ &= 1 - k^2 + \frac{1}{(n-m)^2 \alpha^{2n}} [m A + (m-1) B\alpha + \dots]^2 \\ &= \frac{1}{(n-m)^2 \alpha^{2n}} [m^2 A^2 + 2m(m-1) AB\alpha + \dots], \\ \pm u \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{x}{w} \right) &= \frac{1}{(n-m) \alpha^n} [m A + (m-1) AB\alpha + \dots] \cdot (n-m) \alpha^{n-m-1} \\ &= m \frac{A}{\alpha^{m+1}} + (m-1) \frac{B}{\alpha^m} + \dots, \\ \pm \int u d \frac{x}{w} &= \frac{L}{\alpha^m} + \frac{M}{\alpha^{m-1}} + \dots + P. (\log \alpha + c \pi i) + Q \alpha + \dots \\ \frac{\xi}{k x' \alpha^m + k \alpha^n} &= \frac{\xi + z}{L + M\alpha + \dots + P \alpha^m (\log \alpha + c \pi i) + Q \alpha^{m+1} + \dots} = \frac{w}{\alpha^n} \end{aligned}$$

(I själfva verket blir, som man ser, $L = A, M = B$; men längre än till de två första termerna kan öfverensstämelsen mellan ξ - och z -serierna åtm. i allmänhet ej sträcka sig).

Tangenten är liksom f -grenens ändlig, såsom var att vänta. Är $P = 0$, bibehållas indices. Om i annat fall halfgrenarna öfvergå till bågar af samma g -kurva, böra dessa i allmänhet hafva utseende af en $(m+1, n+1)$ -gren. Se fig. 38—40. Om m är udda och halfgrenarna kongruenta, blir alltid $P = 0$,

¹⁾ Vi använda denna form för parameterframställningen såsom här bekvämare än den med det föregående liksom med bruket hos Björling och Lovén mera öfverensstämmande formen

$$\frac{x}{x' \cdot \alpha^m + A \alpha^n + B \alpha^{n+1} + \dots} = \frac{z}{1} = \frac{w}{\alpha^m}.$$

Att bägge formerna äro lika berättigade samt utan svårighet öfverföras i hvarandra, torde här icke behöfva närmare utredas.

hvarjemte om tillika n är udda, de båda φ -grenarna sammanfalla till en enda symmetrisk.

23. 3) Nu återstå de fall, då både f -punkt och f -tangent äro oändliga. Är den oändliga punkten $z = \lambda x$, $w = 0$, och

A) Är $\lambda \neq \infty$, skriva vi

$$\frac{x}{1} = \frac{z}{\lambda + A\alpha^m + B\alpha^{m+1} + \dots} = \frac{w}{\alpha^n}$$

och finna

$$\begin{aligned} u^2 &= 1 - k^2 + \left[\frac{n\lambda}{\alpha^{n+1}} + \frac{(n-m)A}{\alpha^{n-m+1}} + \frac{(n-m-1)B}{\alpha^{n-m}} + \dots \right]^2 \cdot \frac{\alpha^{2n+1}}{n^2} \\ &= 1 - k^2 + \lambda^2 + \frac{2\lambda}{n} \alpha^m [(n-m)A + (n-m-1)B\alpha + \dots] \\ &\quad + \frac{1}{n^2} \alpha^{2m} [(n-m)A + (n-m-1)B\alpha + \dots]^2 \end{aligned}$$

a) Är $1 - k^2 + \lambda^2 \neq 0$, erhålles vidare

$$\begin{aligned} \pm u \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{x}{w} \right) &= \left\{ \sqrt{1 - k^2 + \lambda^2} + \lambda \frac{\alpha^m}{n \sqrt{1 - k^2 + \lambda^2}} \right\} [(n-m)A + (n-m-1)B\alpha + \dots] \\ &\quad + \frac{\alpha^{2m}}{2n^2 \sqrt{1 - k^2 + \lambda^2}} \left(1 - \frac{\lambda^2}{1 - k^2 + \lambda^2} \right) [(n-m)A + (n-m-1)B\alpha + \dots]^2 \\ &\quad + \dots \left\{ \cdot \frac{n}{\alpha^{n+1}} \right\} \end{aligned}$$

hvarrefter med lätthet fås

$$\frac{\xi}{k} = \frac{\pm \zeta}{\sqrt{1 - k^2 + \lambda^2} + \lambda [L\alpha^m + M\alpha^{m+1} + \dots + P\alpha^n (\log \alpha + c\pi i) + \dots] + (Q + R\lambda^2)\alpha^{2m} + S\alpha^{2m+1} + \dots} = \frac{w}{\alpha^n}$$

eller

$$\frac{\xi}{k} = \frac{\pm \zeta}{\sqrt{1 - k^2 + \lambda^2} + \lambda [L\alpha^m + \dots + P\alpha^n (\log \alpha + c\pi i) + \dots] + (Q + R\lambda^2)\alpha^{2m} + \dots + T(\log \alpha + c\pi i)\alpha^n + \dots} = \frac{u}{\alpha^n},$$

allt eftersom $n < 2m$ eller $n \geq 2m$. Här är $Q \neq 0$, $R \neq 0$ liksom $L \neq 0$.

Såvida ej $\lambda = 0$, bibehålles således ∞ -linien såsom tangent, samt om $P = 0$ eller $P\lambda + T = 0$, äfven indices. Försvinner icke logaritmtermen, erhålla två mot hvar sin reel f -halfgren svarande φ -grenar, om de tillhöra samma (ej symmetriska) kurva; de lägen i förh. till hvarandra, som angifvas å fig. 45—48. — Logaritmen saknas alltid, när m är jämt, n udda, och halfgrenarna kongruenta.

Då $\lambda = 0$, och f -punkten sål. är x -axelns ∞ -punkt, blifva φ -tangenterna ändliga, om $n < 2m$; tillika försvinner då alltid logaritmen, och indices blifva

i allmänhet $n, 2m$, men $\frac{1}{2}n, m$ om f -grenen är symmetrisk i afseende på en rät linie parallel med x -axeln; fig. 23, 30, 35, 37.

I fallet $\lambda = 0, n = 2m$ måste logaritmtermen finnas; rörande g -grenarnas läge, då de tillhöra samma osymmetriska kurva, se fig. 49—51.

När $\lambda = 0, n > 2m$, förblir ∞ -linien tangent, liksom då $n = 2m$. Är f -grenen en symmetrisk parabelgren, och $T = 0$, blifva de nya indices, $m, \frac{1}{2}n$; i öfriga händelser $2m, n$; se fig. 49—63; då n är udda och f -halfgrenarna kongruenta, försvinner alltid den transcendent term.

24. b) Är $\lambda = \pm i \sqrt{1-k^2}$, blir

$$\pm u \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{x}{w} \right) = \frac{1}{n} \alpha^{\frac{m}{2}} \sqrt{2\lambda n[(n-m)A + (n-m-1)B\alpha + \dots] + \alpha^m[(n-m)A + (n-m-1)B\alpha + \dots]^2} \cdot \frac{n}{\alpha^{m+1}}$$

samt, b_1) om m är jämt,

$$\frac{\xi}{k} = \frac{\pm \xi}{\alpha^{\frac{1}{2}m} [L + M\alpha \dots P\alpha^{n-1, m} (\log \alpha + c \pi i) + \dots]} = \frac{w}{\alpha^n}.$$

∞ -linien är således i detta fall alltid g -tangent, såsom på grund af 2) A) kunnat förutses; då $P = 0$, blifva indices $\frac{1}{2}m, n$ (se fig. 52—59); detta är alltid fallet när f -halfgrenarna äro kongruenta. När halfgrenarna, utan att $P = 0$, motsvaras af g -bågar på samma osymmetriska kurva, böra dessa tillsammans hafva utseendet af en gren med indices $\frac{1}{2}m + 1, n$; detta torde likväl, då $\frac{1}{2}m$ är jämt, åtm. blott undantagsvis kunna inträffa (jfr. 2) b,))

b_2) Om m är udda, fås, om man sätter $\alpha = \beta^2$,

$$\frac{\xi}{k} = \frac{\xi}{\beta^m (L + M\beta^2 + N\beta^4 + \dots)} = \frac{n}{\beta^{2n}},$$

således en symmetrisk $(m, 2n)$ -gren; jfr under A), fig. 64, 66.

25. B) Om slutligen $\lambda = \infty$, d. v. s. f -grenen tangerar ∞ -linien på z -axeln, uttrycka vi koord. sålunda:

$$\frac{x}{\alpha^m} = \frac{z}{A + B\alpha + C\alpha^2 + \dots} = \frac{w}{\alpha^n}$$

och härleda

$$u^2 = 1 - k^2 + \frac{\alpha^{2(n-m+1)}}{(n-m)^2} \left[\frac{nA}{\alpha^{n+1}} + \frac{(n-1)B}{\alpha^n} + \dots \right]^2$$

$$= \frac{1}{(n-m)^2 \alpha^{2m}} [(n-m)^2 (1-k^2) \alpha^{2m} + n^2 A^2 + 2n(n-1) A B \alpha + (n-1)^2 B^2 \alpha^2 + \dots],$$

$$\pm u \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{x}{w} \right) = \frac{1}{\alpha^{n+1}} [n A + (n-1) B\alpha + \dots],$$

$$\frac{\xi}{k\alpha^m} = \frac{\pm \xi}{L + M\alpha + \dots + P\alpha^n (\log \alpha + c\pi i) + Q\alpha^{n+1} + \dots} = \frac{w}{\alpha^n} {}^1)$$

Log.-termen försvinner alltid, då n är udda och f -halfgrenarna kongruenta; är äfven n udda, och f -grenen således symmetrisk i afs. på x -axeln, uppstår en på samma sätt *symmetrisk* g -gren. Se för öfrigt fig. 67, 69.

26. I sammanhang med den föregående undersökningen må följande anmärkningar göras.

Den i vissa fall rådande flertydigheten i den reela motsvarigheten mellan f - och g -kurvorna innebär i allmänhet dels blott, att f -ytan låter på flere sätt applicera sig på g -ytan, utan att den deformerade ytans utseende på något sätt ändras, dels också, att i viss mån olika deformationer kunna uppstå, i det olika delar af ytan erhålla ett annat läge i förhållande till hvarandra. Det behöfver väl knappt sägas, att så till vida olika deformationer kunna erhållas äfven derigenom, att man för olika f -delar använder olika värden på integrationskonstanten, svarande mot kongruenta g -kurvor, så att den nya ytan blir ett aggregat af delar af ett eller flere system kongruenta ytor. Ett särskildt fall torde likväl här förtjäna nämnas. Det i viss mening enklaste sättet att (vid ngt gifvet k -värde) deformera en rot.-yta är att låta meridianen (eller vid "utvidgning" den del deraf, som kan komma i fråga) öfver allt behålla sitt sammanhang samt dess tangentvinkelkoefficient sitt tecken. Man finner lätt, att en sålunda erhållen deformation ²⁾ ofta är, ja vid "sammandragning" kan sägas i allmänhet vara ett aggregat af nyss nämnda slag. Vi behöfva endast erinra oss, att mot en vanlig ändlig punkt på kurvan f , med tangent vinkelrät mot rot.-axeln, då k har ett godtyckligt värde < 1 , svarar en reel g -inflexion, och att således g -tangentens vinkelkoefficient icke byter om tecken, ehuru f -tangentens gör det. Häraf följer, att om böjningen utföres på det nyss nämnda sättet, de bågar af den nya meridianen, som härröra från hvardera f -halfgrenarna, måste tillhöra olika, ehuru kongruenta g -kurvor. Liknande förhållande inträffar också i vissa andra fall (se t. ex. fig. 4, 6, 11, 12). Vid "utvidgning" måste sådant vara mera sällsynt men uppenbarligen kan det för enskilda k -värden blifva händelsen, exempelvis om f -kurvan har en ändlig inflexionspunkt med tangentvinkelcoeff. λ , samt $k = \sqrt{1 + \lambda^2}$ ($\lambda = \pm \sqrt{k^2 - 1}$). — Ur analytisk synpunkt

¹⁾ $L = A$, $M = B$; Jfr ²⁾ B).

²⁾ Vi använda stundom detta ord i konkret bemärkelse.

enklast äro naturligtvis de deformationer, som fås, om man använder så få olika φ -kurvor som möjligt, samt så långt då går för sig, låter meridianen behålla sitt sammanhang ¹⁾ och sålunda till sitt utseende förändras i största möjliga öfverensstämmelse med den föregående undersökningens resultat. — Till ytterligare förtydligande af nu berörda förhållanden må ett enkelt exempel anföras. Tänkom oss, att kurvan f eller en del deraf utgör en *oval*, $ABCD$ fig. 70. Deformerar man den tillhörande ytan på det förut nämnda sättet, kommer den nya meridianen att erhålla utseendet $A'B'C'D'$ (fig. 71). Men den φ -kurva, hvaraf bågen $A'B'C'$ är en del, måste vara en periodisk kurva, som ofvanom C' fortsätter med en båge $C'D'A''$, kongruent med $C'D'A'$, hvilken alltså tillhör en kurva, hvaraf den nämnda är en "uppochnedvändning." Skall deformationsmeridianen blifva en del af blott en φ -kurva, måste den gifna ytan tydligen uppskäras längs någon parallelellcirkel (med undantag likväl för det fall, att ovalen är symmetrisk i afs. på rot.-axeln, jfr vid behandl. af rot-ellipsoider).

27. För öfrigt bör det måhända icke lämnas oanmärkt, att φ -grenarnas allmänna utseende i många fall kan bedömas genom ganska omedelbara slutsatser ur ekv.

$$\xi = kx, k \frac{d\zeta}{d\xi} = \sqrt{1 - k^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

Att t. ex. en vanlig f -gren med tangent parallel med x -axeln ger en inflexion på φ -kurvan, inses omedelbart deraf, att ξ växer med x , och att det numeriska värdet af $\frac{d\zeta}{d\xi}$ har ett minimum, när $\frac{dz}{dx}$ är 0, ²⁾ förutsatt att det är reelt på bägge sidor derom. — I sammanhang härmed må påpekas, att man af ekv. strax ofvan med lätthet härleder den enkla relationen

$$k^3 \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} \frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{d^2z}{dx^2} \frac{dz}{dx}$$

¹⁾ Det behöfver väl icke anmärkas, att detta uttryck endast afser den nya ytan såsom redan "färdig": att man vid deformationens utförande med en "materiel yta" stundom kan vara nödsakad att längs någon kurva först uppskära och sedan åter hopfoga ytan, är en sak, hvarvid vi ej fästa något afseende.

²⁾ Jfr. BOUR, anf. arb. pag. 84.

Om slägtet (P) för deformationsintegralens fundamentalkurva vid godtyckligt k -värde.

28. : Då kurvan f är **algebraisk**, är $\int u dx$ en Abelsk integral, hvars beskaffenhet (periodantal) väsentligen beror af *slägtet* (P) för fundamentalkurvan, (x, u) -kurvan eller kortel. u kurvan.

För beräkning af slägtet hos rektifikationsintegralens fundamentalkurva företager Lovén i den § 11 nämnda afhandlingen en fullständig bestämning af nämnda kurvas [$F(x, u)$ -kurvans"] Plückerska karakterer, dervid begagnande den förut gjorda utförliga undersökningen af kurvans singulariteter. Med bestämning af våra u -kurvors karakterer skola vi här lika litet sysselsätta oss, som vi i föregående kapitel gjorde oss reda för deras singulariteter. Äfven beträffande den fullständiga karakterbestämningen må hänvisas till Lovéns motsvarande undersökning, som ord för ord gäller i fråga om vår integrals fundam.-kurva såsom " F -kurva", i fall som " f -kurva" (i L:s mening) betraktas " v -kurvan," hvilken af den gifna meridianen erhålles genom den enkla lineära substitutionen $\frac{x}{x'} = \frac{z}{v\sqrt{1-k^2}} = \frac{w}{w'}$, endast med den ringa förändring, som betingas

deraf, att v -kurvan, då $k > 1$, i allmänhet icke är reel och därför icke nödvändigt förhåller sig lika till de oändlige cirkelpunkterna (hvilket betyder det samma som, att den gifna meridiankurvan ej förhåller sig lika till punkterna $z = \pm i\sqrt{1-k^2}$, $w = 0$).

Slägt-talet låter i själfva verket beräkna sig oberoende af den öfriga karakterbestämningen liksom af den fullständiga singularitetsundersökningen, om man nämligen tillämpar följande sats (hvilken också Lovén använder till verifikation af de uttryck för " F -kurvans" slägte, som förut på det andra sättet erhållits):

Om två algebraiska kurvor C och C' af slägtena p och p' motsvara hvarandra xx' -tydigt, och antalet koincidenspunkter är resp. y och y' , så gäller likheten:

$$y - y' = 2x'(p-1) - 2x(p'-1). \quad ^1)$$

[Att motsvarigheten är xx' -tydig, vill säga, att mot en godtycklig punkt på C svara x' punkter på C' , men mot en godt. punkt på C' x punkter på C . Med

¹⁾ Se ZEUTHEN, Nouv. démonstr. de théorèmes sur des séries de points corresp. sur deux courbes, Math. Annal Bd III, p. 150; eller Clebsch, Vorlesungen über Geometri, s. 459.

y menas antalet punkter på C' , för hvilka två af de motsvarande C -punkterna sammanfalla på samma kurvgren, med y' det omvända]. Medelst denna sats skola vi i det följande direkt härleda formler för P , till en början under antagande, att konstanten k har godtyckligt värde.

29. Ekv. $u^2 = 1 - k^2 + f'^2(x)$ innebär, att mot hvarje punkt på f -kurvan svara tvänne, på hvar sin sida om x -axeln symmetriskt belägna u -punkter, mot hvarje u -punkt deremot endast en f -punkt, såvida icke kurvan f själf är symmetrisk i afs. på x -axeln eller en dermed parallel linie, men deremot två symmetriskt hophörande f -punkter, om f -kurvan är på nämnda sätt symmetrisk (i hvilket fall vi alltid antaga, att symmetriaxeln är tagen till x -axel och korteligen säga, att kurvan är x -symmetrisk). Då vi taga ett godtyckligt k -värde, måste vidare samtliga u -punkter bilda en "egentlig", i afs. på x -axeln symmetrisk kurva, m. a. o. man måste, om man från en godtycklig punkt i x -planet utgår med ett motsvarande u -värde, kunna efter att hafva beskrifvit en kontinuerlig väg återkomma med hvilket som helst af de värden, som u enl. ekv. ofvan kan hafva i utgångspunkten. Att samtliga värdena af u^2 på nämnda sätt kunna öfverföras i hvarandra, följer omedelbart deraf, att u^2 är en envärdig funktion af $f'(x)$. Finnes det vidare någon punkt i x -planet som är kritisk för två u -värden, hvilka motsvara samma u^2 , så kunna äfven två sådana u -värden alltid på sagda sätt utbytas, och den symmetriska kurvan $z = u$ är således egentlig; m. a. o. den är egentlig, om det blott finnes någon symmetrisk ("oparig") "gren". Vi sågo nu i förra kap., att vissa f -grenar gåfvo upphof till symmetriska φ -grenar; och det är gifvet, att de tillhörande grenarna af u -kurvan (differentialkurvan till φ som funktion af x) då också äro symmetriska, hvilket man också genom direkt undersökning af u -grenarna mycket lätt finner (jfr Lovéns singularitets-undersökning). Nämnda f -grenar voro, förutom vissa x -symmetriska, dels vissa oändliga, genom någon af punkterna $z = \pm i\sqrt{1-k^2}$, $w = 0$ gående [se 2) A) b) och 3) A) b) föreg. kap., Lov. § 11, § 16)], dels [1) A) b), Lov. § 7] alla ändliga med udda index-summa (differens) samt tangent genom någon af nämnda oändliga punkter, hvilka i det följande för korthets skull kallas punkterna I' och I'' . Vid godtyckligt k går nu kurvan f hvarken genom I' eller I'' , men deremot kan från hvardera af dessa punkter dragas ett visst antal ändliga tangenter, hvilkas kontaktpunkter äro ändliga (1, 2)-punkter och därför gifva upphof till opariga u -grenar. Sådana kunna följaktligen vid godtyckl. k icke saknas, och med deras tillvaro är tillvaron af en egentlig x -symmetrisk u -kurva ådagalagd.

30. Vi tänka oss nu först, att kurvan f *icke* är x -symmetrisk, och således motsvarigheten mellan f - och u -kurvan (1, 2)-tydig. De enstaka f -punkter, som motsvaras af endast en u -punkt, äro de nyss nämnda ändliga (1, 2)-punkterna med tangenter genom I' eller I'' . Deras antal är $2h_1$, om h_1 betyder antalet *ändliga f -tangenter genom en godtycklig ∞ -punkt*. Den ifrågasvarande, mellan f - och u -kurvorna såsom C - och C' -kurva rådande motsvarigheten karakteriseras således af talen $x=1$, $x'=2$, $y=0$, $y'=2h_1$, och man erhåller, om i den ofvan anförda ekv. för p' skrives P ,

$$P = 2p + h_1 - 1 \dots \dots \dots (8)$$

Är f -kurvan *ä-symmetrisk*, gestaltar sig saken annorlunda. För det första har man då $x=x'=2$. Vidare komma nu opariga u -grenar att uppstå af vissa dylika på f -kurvan, nämligen af dem, för hvilka $f'(x) = \infty$, d. v. s. ändliga sådana med tangent parallel med z -axeln, eller oändliga sådana genom $x=w=0$ (ändl. eller oändl. tangent) men deremot icke af symmetriska f -grenar med $f'(x)=0$ (se föreg. kap. 1) B), 2) B), 3) B, Lovén § 8, 13, 18). [Att så måste vara inses för öfrigt lätt omedelbart af ekv. $u^2 = 1 - k^2 + f'^2(x)$.] Man erhåller därför $y' = 2h_1 + s$, om s betyder antalet opariga f -punkter af det först nämnda slaget. De till andra slaget hörande motsvaras hvardera af två symmetriskt hophörande u -punkter. Dessa f -grenars antal må vara $q+r$, i det r betyder antalet symmetriska, x -axeln i ändlig eller oändlig punkt tangerande spetsar, q deremot antalet opariga grenar, som tangera ∞ -linien på x -axeln. Då nu y är antalet punkter på u -kurvan, som härröra från opariga f -punkter, erhålla vi $y = s + 2(q+r)$. Genom insättning i ekv. § 28 fås sål.:

$$P = p + \frac{1}{2}(h_1 - q - r) \dots \dots \dots (9).$$

I förbigående må här nämnas, att formlerna (8) o. (9) uppenbarligen gälla, äfven om P afser själfva f -kurvans rektifikationsintegral ($k=0$), i händelse kurvan icke står i något speciellt förhållande till de oändliga cirkelpunkterna.

31. Vi vilja nu medelst (8) och (9) bestämma villkoren för att $P=0$ eller $P=1$. I förra fallet är deform.-integralen elementär (elementärtranscendent eller algebraisk) i senare fallet (i regeln)¹⁾ elliptisk.

Är f -kurvan *icke x -symmetrisk*, blir enligt (8) $P=0$, endast om $p=0$, $h_1=1$. Villkoret $h_1=1$ är likväl ensamt tillräckligt, ty det innebär i själfva verket äfven, att $p=0$. Det vill nämligen säga, att från en godtycklig ∞ -

¹⁾ Detta tillägg torde i själfva verket vara öfverflödigt, då fråga är om godtyckligt k -värde.

punkt kan dragas blott *en* ändlig tangent, hvari tydligen omedelbart ligger en ömsesidigt entydig motsvarighet mellan kurvan och ∞ -linien. — Att $h_1 = 1$, kan för öfrigt äfven uttryckas så, att ∞ -linien, tänkt dragen från en godtycklig ∞ -punkt, skall vara att anse som $(\nu-1)$ -faldig tangent till kurvan (ν kurvans klass). Med begagnande af indexbeteckningen kunna vi uttrycka detta så, att $\Sigma(n-m) = \nu-1$, summationen utsträckt till alla ∞ -linien tangerande kurvgrenar (se Björling, *Über entspr. Sing. etc.* pag. 4). I själfva verket saknar kurvan i detta fall oändliga grenar med ändliga tangenter, m. a. o. saknar asymptoter, emedan en sådan, tänkt dragen från den oändliga kontaktpunkten, representerar minst två tangenter och därför, när man öfvergår till en annan ∞ -punkt, upplöser sig i minst två tangenter med ändliga kontaktpunkter, hvilket strider deremot, att $h_1 = 1$. Af samma skäl kan kurvan ej håller hafva några ändliga inflexionstangenter, liksom naturligtvis ej håller dubbeltangenter. Vidare äro alla ∞ -punkter $(1, n)$ -punkter, ty mindre index utmärker det antal ändliga tangenter som sammanfalla med ∞ -linien, när man från en godtycklig ∞ -punkt öfvergår till den oändliga kurvpunkten [$m = n - (n-m)$], och detta tal måste vara 1, då $h_1 = 1$; af liknande skäl går genom hvarje oändlig kurvpunkt blott *en* gren; kurvan saknar således alla slags oändliga "punktsingulariteter." På grund af hvad nu sagts, är $\Sigma(n-1) = \nu-1$ (summationen gäller alla ∞ -punkter) eller $\mu - S_\infty = \nu-1$, om μ är kurvans ordning, S_∞ antalet skilda ∞ -punkter.

Skall ekv. (8) ge $P = 1$, fordras, att $p = 0$, $h_1 = 2$. Att $h_1 = 2$, kan uttryckas så, att $\Sigma(n-m) = \nu-2$, summationen utsträckt till alla ∞ -linien tangerande kurvgrenar. Man inser lätt, att i detta fall följande förhållanden äga rum: alla asymptoter äro vanliga (d. v. s. sådana, som tangera kurvan i en oändlig $(1, 2)$ -punkt och i ingen ändlig), inga ändliga singulärtangenter af högre ordning finnas, alla ∞ -linien tangerande grenar hafva 1 eller 2 till mindre index, inga andra oändliga punktsingulariteter finnas än ∞ -linien tangerande $(2, n)$ -grenar och "kontaktsknutar," bildade af två ∞ -linien i samma punkt tangerande $(1, n)$ -grenar.

32. Vi öfvergå att betrakta formeln (9), som gäller, då kurvan f är *x-symmetrisk*. Denna formel kan lika litet som (8) gifva $P < p; q + r$ kan nämligen icke vara större än h_1 , emedan antalet ändliga tangenter, som sammanfalla med ∞ -linien, när man från en godtycklig ∞ -punkt öfvergår till x -axelns, är minst q , och de som förblifva ändliga äro minst r . Men under vissa villkor

kan $q + r$ blifva lika med h_1 , och således $P = p$. (Dessa villkor äro: alla q -grenar skola hafva indices $1, n$, alla r -grenar vara ändliga med indices $n-1, n$ kurvan skall gå genom x -axelns ∞ -punkt blott med q -grenar, samt inga ändliga tangenter skola gå genom nämnda punkt, förutom r -punkternas). Det må likväl lämnas derhän, huruvida detta kan inträffa, då $p > 0$.

När $p = 0$, $q + r = h_1$, blir $P = 0$. I själfva verket kan $q + r$ vid unikursala symmetriska kurvor icke vara större än 2. Hela antalet opariga punkter är nämligen 2; ty vid kurvans entydiga afbildning på en rät linie kommer, såsom man utan all svårighet inser, symmetrien att öfvergå till en projektivisk (involutorisk) korrespondens mellan liniens punkter, och dess opariga punkter komma att motsvaras af involutionens två dubbelpunkter. P blir således noll, då ($p = 0$ samt) $h_1 = 1$ (att, såsom formeln fordrar, i detta fall äfven $q + r = 1$, kan lätt direkt visas), samt då $p = 0$, $h_1 = q + r = 2$.

Är $p = 0$, blir $P = 1$, om tillika $h_1 = 2$, $q = r = 0$, eller $h_1 = 3$, $q + r = 1$, eller $h_1 = 4$, $q + r = 2$. Detsamma skulle inträffa, om $p = 1$, $q + r = 2$; men det må (se ofvan) lämnas ofgjordt, huruvida kurvor finnas, som uppfylla dessa villkor.

33. Då kurvan f är unikursal, och dess koordinater sålunda kunna uttryckas som rationela funktioner af en parameter, verifierar man ganska lätt de erhållna resultaten. I detta fall blir u -kurvan unikursal, elliptisk eller hyperelliptisk, emedan dess abscissa är uttryckt som rationel funktion af parametern (α), ordinatan som kvadratroten ur en rationel funktion. Bringas uttrycket under rotmärket till hel form, blir vid godtyckligt k dess gradtal $2h_1$; ty mot ett godtyckligt värde af $f'(x)$ svara h_1 kurvpunkter d. v. s. h_1 α -värden, hvarför täljare eller nämnare i det rationela uttrycket för $f'(x)$ måste vara af graden h_1 i afs. på α , och alltså täljaren i $1 - k^2 + f'^2(x)$ af graden $2h_1$. Men häraf följer i allmänhet, att u -kurvans slägte är $h_1 - 1$,¹⁾ hvilket stämmer med formeln (8). [Jfr Lovén sid. 17.]

Om x är jämn, z udda, samt följaktligen $f'(x)$ också udda funktion af α , i hvilket fall f -kurvan tydligen är x -symmetrisk, kan man emellertid genom substitutionen $\alpha^2 = \beta$ förminska gradtalet för polynomet under rotmärket, utan att x -uttrycket upphör att vara rationelt; P blir då, antaget att nämnda gradtal

¹⁾ Se J. MÖLLER, Integr. af diff.-ekv. $F\left(u, \frac{du}{dx}\right) = 0$ med dubbelper. funkt., sid. 29; eller CLEBSCH, Vorlesungen über Geom. pag. 916.

reducerar sig till $n, \frac{1}{2}(n-1)$ eller $\frac{1}{2}(n-2)$, allt efter som n är udda eller jämt. Men n är lika med h_1 eller $h_1 + 1$, allt efter som $f'(x)$ är af formen $\alpha f_1(\alpha^2): f_2(\alpha^2)$ eller $f_2(\alpha^2): \alpha f_1(\alpha^2)$, polynomet f_2 ej innehållande α^2 som faktor; ty i förra fallet blir u af formen $\sqrt{F(\alpha^2)}: f_2(\alpha^2)$ (F af graden $2h_1$ i afs. på α) d. v. s. $\sqrt{F(\beta)}: f_2(\beta)$ (F af graden h_1 i afs. på β); men i senare fallet erhålles $u = \sqrt{F(\alpha^2)}: \alpha f_1(\alpha^2) = \sqrt{\beta F(\beta)}: \beta f_1(\beta)$. Är nu h_1 udda, blir alltid $P = \frac{1}{2}(h_1 - 1)$; är h_1 jämt, blir $P = \frac{1}{2}(h_1 - 2)$, om $f'(x) = \alpha f_1: f_2$, men $P = \frac{1}{2}h_1$, om $f'(x) = f_2: \alpha f_1$. Detta öfverensstämmer med formeln (9). Att h_1 är udda innebär nämligen, att f är af graden $h_1 - 1$ i afs. på α , f_2 af samma eller lägre gradtal; $f'(x)$ blir därför ∞ för $\alpha = \infty$, men 0 för $\alpha = 0$, eller tvärtom, hvilket betyder, att af de två opariga punkterna, hvilkas parametervärden tydligen äro 0 och ∞ , den ena men ej den andra är en q - eller r -punkt, sål. $q + r = 1$. Är deremot h_1 jämt, och $f'(x) = \alpha f_1: f_2$, måste f_2 vara af graden h_1 , f_1 högst af gr. $h_1 - 2$, och $f'(x)$ blir 0 både för $\alpha = 0$ och $\alpha = \infty$; hvarför $q + r = 2$; när h_1 är jämt, och $f'(x) = f_2: \alpha f_1$, gäller detsamma om polynomens gradtal, och såväl $\alpha = 0$ som $\alpha = \infty$ ger $f'(x) = \infty$; hvaraf följer $q + r = 0$. Härmed har i själfva verket verifierats, att formeln (9) alltid gäller, då kurvan f är unikursal och x -symmetrisk; ty parametern kan då, såsom lätt visas, alltid väljas så, att x blir jämn, z udda funktion af α . — Exempelvis må nämnas, huru $f'(x)$ måste vara uttryckt i α , för att P skall bli 0 eller 1 . I fallet $h_1 = 1$, $q + r = 1$, är $f'(x) = A\alpha$ (eller $A:\alpha$); när $h_1 = q + r = 2$, får man $f'(x) = \alpha:(A\alpha^2 + B)$; då något af villkoren $h_1 = 2$, $q + r = 0$ eller $h_1 = 3$, $q + r = 1$ eller $h_1 = 4$, $q + r = 2$ är uppfyllt, gäller det resp., att $f'(x) = (A\alpha^2 + B):\alpha$, $f'(x) = \alpha(A\alpha^2 + B):(C\alpha^2 + D)$ eller $(C\alpha^2 + D):\alpha(A\alpha^2 + B)$, $f'(x) = \alpha(A\alpha + B):(C\alpha^4 + D\alpha^2 + E)$; i sista fallet kunna koeff. A och D vara noll, i det näst föreg. B och C .

34. När deformationsintegralen för godtyckligt k är elementär, hvilket vi anse likbetydande med, att för godt. k $P = 0$, kallas kurvan f i det följande *A-kurva*, när integralen är elliptisk ($P = 1$) deremot *B-kurva*.

Enligt en förut gjord anmärkning gäller det, att hvarje *A-kurva* är i vanlig mening rektifiabel, ehuru omvänt en rektifiabel kurva endast då med nödvändighet är *A-kurva*, när den icke står i något speciellt förhållande till de oändliga cirkelpunkterna. Likaså är *B-kurvornas* båglängd elliptisk eller elementär, och cirkelpunktsindifferentia kurvor med elliptisk båglängd äro *B-kurvor*.

Om P 's minskning vid enstaka k -värden.

35. Vid vissa k -värden kan P blifva mindre än vid godtyckligt k , af det skäl att f -kurvan kommer att stå i speciellt förhållande till punkterna I' och I'' ($z = ix\sqrt{1-k^2}$, $w = 0$). Vi skola nu härleda regler för denna minskning.

Först må följande beteckningar införas:

- h' (resp. h'') betyder antalet ändliga kontaktpunkter med udda indexdifferens för f -tangenter från I' (I'');
- h „ detsamma för endera af nämnda punkter, då kurvan förhåller sig lika till dem;
- i' (i'') „ antalet f -grenar genom I' (I'') med ändlig tangent och udda större index;
- i „ detsamma för endera punkten vid lika förhållande;
- j' (j'') „ antalet f -grenar genom I' (I'') med oändlig tangent och udda mindre index;
- j „ detsamma för endera punkten vid lika förhållande;
- hvarjämte såsom förut
- q betyder antalet omaka f -grenar, som tangera ∞ -linien på x -axeln;
- r „ antalet α -symmetriska f -spetsar;
- s „ antalet öfriga opariga f -grenar.

[I förbigående må här påpekas, att bokstäfverna q, r, s hafva alldeles samma betydelse med afseende på " v -kurvan," liksom också släktet (p) är lika för bägge kurvorna, medan deremot de öfriga bokstäfverna, hänfödda till v -kurvan, såsom redan förut anmärkts, erhålla en så till vida olika betydelse, att i st. f. I' och I'' träda de oändlige cirkelpunkterna.]

36. Såsom i förra kap. visades, är den x -symmetriska kurvan $z = u = \sqrt{1-k^2 + f'^2(x)}$ vid godtyckligt k -värde "egentlig." Då man vill bestämma P 's värde för speciela kritiska k -värden, måste man göra sig reda för, under hvilka förhållanden nämnda kurva sönderfaller i två själfständiga, osymmetriska kurvor, eller såsom vi också kunna uttrycka oss, i hvilka fall u -kurvan blir osymmetrisk (i det vi med " u -kurvan" alltid mena en egentlig kurva). Denna fråga är med ledning af det föregående lätt afgjord. Att u -kurvan måste vara symmetrisk, då opariga u -grenar finnas, är gifvet (jfr förra kap.); att den omvändt icke kan vara symmetrisk när sådana saknas, inses också lätt; genom att i x -planet beskrifva en sluten kontinuerlig väg, kan man då visserligen

alltid öfverföra ett u -värde i det ena af två mot samma x svarande, symmetriskt hophöriga u -värden, men icke i det andra. Enligt hvad i föreg. kap. anmärktes rörande de symmetriska u -grenarnas uppkomst, blir således (med begagnande af de nu antagna beteckningarne) u -kurvan osymmetrisk, när

$$h' = h'' = i' = i'' = j' = j'' = 0,$$

samt i händelse kurvan f är x -symmetrisk, derjämte

$$s = 0.$$

Emedan i senare fallet kurvan alltid förhåller sig lika till I och I' , kunna de förra villkoren då enklare skrivas $h = i = j = 0$.)

Om nu blott dessa förhållanden icke äga rum, råder oberoende af f :s förhållande till I och I' , mellan f - och u -kurvorna en (1, 2)-tydig motsvarighet, när kurvan f icke är x -symmetrisk, en (2, 2)-tydig när hon är det. I förra händelsen har man således alltid $x = 1, x' = 2, y = 0$; deremot kan y' i enskilda fall erhålla annat värde än vid godtyckligt k ; dess generela uttryck är $h' + h'' + i' + i'' + j' + j''$, då ju mot hvarje enhet i detta tal svarar en oparig u -punkt. För P erhålla vi således, när f -kurvan icke är x -symmetrisk, men u -kurvan är det, medelst ekv. § 28 det generela uttrycket

$$P = 2p - 1 + \frac{1}{2} (h' + h'' + i' + i'' + j' + j'') \dots (10).$$

I händelse f -kurvan förhåller sig lika till I och I' (såsom alltid då $k < 1$, och sål. I, I' imaginära), kan denna formel enklare skrivas

$$P = 2p - 1 + h + i + j$$

(Jfr Lovéns formel 3) sid. 22).

När såväl f -kurvan som u -kurvan är x -symmetrisk, har man generelt $x = x' = 2, y = 2(q + r) + s, y' = 2(h + i + j) + s$ (se förra kap.); häraf följer

$$P = p + \frac{1}{2} (h + i + j - q - r) \dots (11)$$

(Lov. sid. 25 form. (5)).

Det återstår nu att bestämma P i de fall, då u -kurvan blir osymmetrisk. Den af ekv. $u^2 = 1 - k^2 + f'^2(x)$ bestämda motsvarigheten blir då i allmänhet ömsesidigt entydig, hvaraf följer

$$P = p \quad (\text{Lov. sid. 24}) \dots (12).$$

Men om f -kurvan är x -symmetrisk, svarar mot en godtycklig u -punkt symmetriskt hophörande f -punkter. Man har följaktligen $x = 2, x' = y' = 0$, och emedan alla opariga f -punkter äro q - eller r -punkter, är $y = q + r$. Ekv. § 28 ger

$$2P = p + \frac{1}{2} (2 - q - r) \quad (\text{Lov. sid. 25}) \dots (13).$$

Rörande denna formel må emellertid anmärkas, att den förhända aldrig äger tillämpning då $p > 0$ (jfr Lov. sid. 25), samt att den, när $p = 0$, reducerar sig till $P = p$ (man har ju då $q + r = 2$).

37. Med ledning af de uppställda formlerna vilja vi nu något närmare göra oss reda för det sätt, hvarpå P ändras genom kurvans f speciella förhållande till I' och I'' .

Vid godtyckligt k har man $i' = i'' = j' = j'' = 0$, samt $h' = h'' = h_1$ (se föreg. kap.). Men då I' eller I'' kommer i något särskildt läge till f -kurvan, förändras de nämnda bokstäfvernas värden enligt följande regler:

Hvarje kurvgren genom I' med ändlig tangent och indices m, n absorberar n vanliga ändliga kontaktpunkter för tangenter från I' och minskar således h' med n , hvarje sådan med udda n ökar dessutom i' med 1.

För hvarje ∞ -linien i I' tangerande (m, n) -gren, minskas h' med n , emedan $n - (n - m)$ ändliga tangenter absorberas; då m är udda, ökas tillika j' med 1.

Hvarje ändlig kontaktpunkt för tangent genom I' med udda indexdifferens minskar h' med $n - m - 1$, ty den är ekvivalent med $n - m$ vanliga kontaktpunkter; hvarje dylik med jämn ind.-diff. minskar af samma skäl h' med $n - m$.

Naturligtvis gäller detsamma om punkten I'' och talen h'', i'', j'' . Då f ej är x -symmetrisk minskas P på grund här af och enl. ekv. (10)

med $\frac{1}{2}n$ för hvarje genom I' eller I'' gående (m, n) -gren med ändlig tangent och jämt n ;

med $\frac{1}{2}(n - 1)$ för hvarje dylik med udda n ;

med $\frac{1}{2}m$ för hvarje ∞ -linien i I' eller I'' tangerande (m, n) -gren med jämt m ;

med $\frac{1}{2}(m - 1)$ för hvarje dylik med udda m ;

med $\frac{1}{2}(n - m)$ för hvarje ändlig (m, n) -gren med tangent genom I' eller I'' samt jämn indexdifferens;

med $\frac{1}{2}(n - m - 1)$ för hvarje dylik med udda $n - m$; ¹⁾,

allt detta likväl under förutsättning, att icke villkoren för, att formeln (12) skall gälla, äro uppfyllda.

När f är x -symmetriskt, kommer enl. (11) hvarje par af symmetriskt hophörande kurvpunkter, som förhålla sig till I' och I'' på något af de nämnda sätten, att hafva samma inflytande på P s värde, som i det allmänna fallet hvarje särskild punkt, under förutsättning att icke $h = i = j = s = 0$.

¹⁾ Jfr Lovén §§ 36, 39, 40, der motsvarande satser härledas direkt för att sedan användas vid uppställandet af P -formlerna.

38. För att finna de mot P -minskningar svarande k -värdena, har man enligt det föregående att uppsöka dels de oändliga kurvgränar, som icke äro ∞ -linien tangerande $(1, n)$ -grénar, dels de ändliga punkterna med indexdifferens > 1 , samt i de särskilde fallen sätta tangentvinkelkoeff. $\lambda = i\sqrt{1-k^2}$ eller $k = \sqrt{1-\lambda^2}$. Nämda ändliga och oändliga kurvpunkter äro tydligen de "egentliga" koincidenspunkterna i korrespondensen mellan parallela tangenters kontaktpunkter, m. a. o. mellan kurvans rörliga skärningspunkter med de resp. ∞ -punkternas första polarer i afs. på densamma. De enkla koincidenserna till denna korrespondens äro till antalet $2(p + h_1 - 1)$. Ty om mot en godtycklig punkt (x) af en algebraisk kurva svarar en annan kurva, som i punkten (x) själf har γ punkter gemensamma med grundkurvan samt dessutom α rörliga skärningspunkter, och mot en godtycklig punkt (y) svara β punkter (x) (utskurna af en kurva, som i (y) har γ punkter gemensamma med grundkurvan), så inträffar det, om p är grundkurvans slägte, $\alpha + \beta + 2p\gamma$ gånger, att två hvarandra motsvarande punkter (x) och (y) sammanfalla på samma kurvgrén, d. v. s. den (α, β) -tydiga motsvarigheten har $\alpha + \beta + 2p\gamma$ enkla egentliga koincidenser (eller dermed ekvivalenta af högre ordning)¹⁾. Vid den nu i fråga varande symmetriska korrespondensen är $\alpha = \beta = h_1 - 1$, $\gamma = 1$, och således koincidenserna $2(p + h_1 - 1)$ ²⁾. Då koincidenser af högre ordning finnas, är naturligtvis antalet för P kritiska k -värden mindre än koincidenstalet, men å andra sidan blir hvarje särskild P -minskning större, af ju högre ordning den tillhörande koincidensen är. Sak samma gäller i allmänhet, om mot flere skilda koincidenser svarar samma k ; detta inträffar, om i flere koincidenspunkter $\lambda [= f'(x)]$ är lika eller blott till tecknet olika; det sist nämnda är alltid fallet, då kurvan f är x - eller z -symmetrisk, samt då det finnes koincidenspunkter, der λ är rent imaginärt; likväl kommer vid x -symmetri koinc.-punkternas parvisa hophörighet endast att minska (halfvera) de kritiska k -värdenas antal, icke att göra de särskilde P -minskningarna betydligare. Det är också tydligt, att

¹⁾ Se CLEBSCH, Vorles. über Geom., pag. 416 jämte föreg. och följ.

²⁾ Det må nämnas, att dessa koinc.-punkter utskäras af den s. k. Jacobiska kurvan till de 3 kurvorna $F = 0$, $\frac{dF}{dx} = 0$, $\frac{dF}{dz} = 0$ [om $F = 0$ för ögonblicket betyder $z = f(x)$], samt att man genom att undersöka denna "koincidenskurvas" förhållande i de fasta skärningspunkterna mellan f -kurvan och ∞ -punkternas polarer — kurvans singulära punkter och kontakter med ∞ -linien — bör kunna verifiera, att $2(p + h_1 - 1)$ af koinc.-kurvans skärningspunkter med kurvan f äro verkliga koincidenspunkter.

vissa koinc.-punkter kunna blifva utan betydelse för deformationsfrågan, emedan de tillhörande k -värdena icke motsvara någon verklig deformation af den gifna ytan. Vid reela λ blir detta fallet, för det första om $\lambda = 0$ (koinc.-tangenten parallel med x -axeln), emedan k då blir 1, och φ -kurvan sammanfaller med f -kurvan; för det andra om $\lambda = \infty$, och därför äfven $k = \infty$, eller i allmänhet om λ har sitt numeriskt största värde (d. v. s. om ingen reel tangent finnes med numeriskt större vinkelkoefficient), emedan i detta fall k -värdet $\sqrt{1 + \lambda^2}$, liksom alla större, icke motsvaras af någon reel deformation (§ 7). Af imaginära koinc.-punkter har man i själfva verket att taga i betraktande endast sådana, der λ är rent imaginärt, och $|\lambda| < 1$. Det bör för öfrigt observeras, att mot de reele punkter, som äro af betydelse, svara k -värden > 1 (singulära "utvidgningar"), mot de imaginära k -värden < 1 (singulära "sammandragningar").

Om algebraiska deformationer.

39. Ett nödvändigt villkor för, att $\int u dx$ skall sakna perioder, och den nya meridianen därför vara algebraisk, är, att alla (reela eller imag.) g -grenar äro af algebraisk natur. Tillika fordras i allmänhet, att u -kurvan är unikursal. Men dessa två villkor äro tillräckliga. Att de mot ändligt x (§) svarande oändlige g -grenarna äro af algebraisk karakter, betyder, att $\int u dx$ saknar *polarperioder*. (Dettr blir alltid händelsen, då f -kurvan icke har någon mot ändligt x svarande gren, emedan någon dylik g -gren då ej kan uppstå). Att äfven de öfrige oändlige grenarna uppfylla samma villkor, innebär, att antalet *cykelperioder* är högst 2 P ,¹⁾ och alltså 0, när $P = 0$. (I förbigående må erinras, att Lovén sid. 30 visat, på hvad sätt u -kurvans symmetri inverkar på antalet cykelperioder; det uppgår i allmänhet icke till 2 P).

¹⁾ Se CLEBSCH und GORDAN, Theorie der Abel'schen Funktionen § 23, 25; J. R. RYDBERG, Om algebraiska integraler till alg. funkt., Lunds Univ. Årsskrift 1878—79, § 5—§ 9. Att integralkurvans mot oändligt x svarande grenar äro af alg. natur, är liktydig med, att hvarje enkel eller flerfaldig omgång kring antipodpunkten (O'), som återger samma u -värde, hvarifrån man utgick, äfven återger samma värde på integralen, m. a. o. att de enkla eller flerfaldiga omgångsintegralerna försvinna. Vid beviset för den anförda satsen, kan man, om man så vill, bortse från det fall, då flerfaldiga omgångar komma i fråga, d. v. s. då O' är kritisk för vissa u -värden: så länge blott integralen icke har någon logaritmisk singularitet i O' , gälla ord för ord de i nämnda arbeten under antagande af neutralt O' förda resonsemangen, om man i st. f. O' betraktar en godtycklig neutral punkt på sfären.

I de fall, då $\int u dx$ är algebraisk vid godtyckligt k , benämnes kurvan f i det följande " A_1 -kurva," under det med " A_2 -kurvor" menas sådana, hvilkas motsvarande ytor vid godt. k gifva elementärtranscendenta deformationer.

40. Vi fråga nu först: finnas några icke x -symmetriska A_1 -kurvor? En sådan bör (§ 30) hafva $h_1 = 1$, samt tillika vara sådan, att de oändlige q -grenarna vid hvarje k blifva af algebraisk natur. Det måste vara mycket sällsynt, att dessa villkor äro samtidigt uppfyllda, men undersökningen af q -singulariteterna lämnar dock upplysning om ett fall, då det inträffar. Tänkom oss nämligen en kurva af klassen n , som är symmetrisk i afs. på z -axeln eller en dermed parallel linie samt har en oparig $(1, n)$ -gren, tangerande ∞ -linien på x -axeln. En sådan kurva har tydligen $h_1 = 1$, och de två oändlige q -grenarna blifva algebraiska med indices $2, n$ (§ 26). Vi observera för öfrigt, att äfven ordningen är n , så att kurvan är "reciprok till sig själf," samt att antalet inflexioner (och sål. äfven antalet spetsar) är $n-2$, emedan så många inflexioner innehållas i den oändliga $(1, n)$ -grenen (Björling, Über entspr. Serig pag. 4), samt ändliga inflexioner saknas. Dubbelpunkterna äro $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - (n-2) = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$.

Nämnda kurvor behålla sin egenskap af A -kurvor, om de vridas en rät vinkel och sålunda blifva x -symmetriska. Ty den omaka grenen genom z -axelns ∞ -punkt ger (enl. § 26) en likartad q -gren, och $P = o$. Kurvan u får i detta fall blott en oändlig gren; alla de $2(n-1)$ u -värdena bilda därför i antipodpunkten ett enda "cirkulärsystem," O' är $[2(n-1) - 1]$ faldig kritisk punkt för u , de ändliga kritiska punkternas antal är därför också $2n-3$ ¹⁾, hvarför alla åtgå för bildande af "fundamentalöglor," och sålunda inga cykler kunna erhållas.

Några ytterligare x -symmetriska A_1 -kurvor med $h_1 = 1$ ger q -singularitetsundersökningen icke vid handen. Deremot bör det finnas sådana med $h_1 = 2$, $r = 2$, $p = o$ samt ∞ -linien tangerande och i afs. på densamma symmetriska $(2, n)$ -grenar (n udda), ej gående genom koordinataxels ∞ -punkt. Dessa kurvor äro både x - och z -symmetriska. Hit höra i själfva verket de kurvor, till hvilka de först nämde z -symmetriske öfvergå vid de motsvarande ytornas deformation, samt de, som af dessa erhållas genom vridning en rät vinkel; de sist nämnda kurvorna ge icke några reela, ej x -symmetriska q -kurvor (se exemplen).

¹⁾ En m -värdig algebr. funktion har näml. $2p + 2(m-1)$ kritiska punkter; detta följer omedelbart af koincidenssatsen § 28; se f. öfr. Clebsch u. Gordan § 22, Rydberg § 5.

Man verifierar ytterst lätt, att vid de nämnda kurvorna med $h_1 = 1 \int u dx$ blir algebraisk vid hvarje k . Man måste nämligen vid de z -symmetriske kunna sätta $f'(x) = 1 : \alpha$ samt tillika $x =$ en hel, udda funktion af α (x blir oändligt blott för $\alpha = \infty$), vid de x -symmetriske deremot $f'(x) = \alpha$, $x =$ en hel, jämn funktion af α . I bägge fallen blir (så länge z , uttryckt i α ej innehåller någon transcendent term) $u f'(x)$ en hel udda funktion af α , multiplicerad med kvadrat-roten ur ett binom $A\alpha^2 + B$, hvaraf, såsom lätt inses, följer, att $\int u dx$ alltid är algebraisk.

41. *Enstaka algebraiska deformationer* uppstå, om vid vissa k -värden såväl P är 0, som samtliga g -singulariteter äro algebraiska, ehuru ettdera eller bägge af dessa villkor icke är uppfyllt vid hvarje k . Reglerna för P 's minskning vid enstaka k -värden känna vi redan. Det enda fall, då undersökningen af g -singulariteterna omedelbart visar, att en oändlig f -gren, som vid godtyckl. k ger upphof till en logaritmisk g -singularitet, undantagsvis motsvaras af en algebraisk g -gren, är det, då genom en oändlig punkt $z = \pm \lambda x, w = 0$ går en ∞ -linien tangerande f -gren med udda mindre index, samt $k = \sqrt{1 + \lambda^2}$ (§ 25). Man kan likväl, då $P = 0$, samt polarperiod med säkerhet saknas, vara viss om att erhålla en algebraisk deformation, om tillika u -kurvan har blott en mot oändligt x svarande gren, äfven om singularitets-undersökningen icke direkt visar, att denna måste gifva en algebraisk g -gren; ty i detta fall blir antalet enkla cykler noll (se föreg. §). Nämnda förhållande inträffar, då f -kurvan har blott en (eller vid x -symmetri två symmetriskt motsvariga) x -oändliga grenar, samt mot denna (dessa) svarar antingen en symmetrisk u -gren eller två grenar tillhörande hvar sin af två osymmetriska u -kurvor, i hvilka den fullständiga kurvan $z = u$ sönderfaller. I förra fallet finner man visserligen omedelbart af singularitetsundersökningen, att någon logaritmisk g -singularitet icke kan uppstå; men deremot icke i det senare. När osymmetriska u -kurvor uppstå, har i det föregående visats. Erinras må här, att endast i detta fall en algebraisk g -kurva kan blifva osymmetrisk: en reel algebr. kurva kan icke vara imaginärt symmetrisk.

42. Hvilka slutsatser man af det nu anförda kan draga med afseende på den frågan, när en kurva har algebraisk *båglängd* (en fråga som Lovén ej vidrört), torde af det föregående vara tillräckligt tydligt.

Vi få för öfrigt icke glömma, att $\int u dx$ kan blifva algebraisk (eller i allm. elementär), äfven utan att $P = 0$. Emedan en algebraisk kurvas evoluta alltid har algebraisk båglängd, måste man, om i dess ekvation $\Theta(x, z) = 0$ för z

substitueras $z: \sqrt{1-a^2}$, erhålla en kurva, som vid rotation kring z -axeln ger en yta med en mot $k=a$ svarande algebraisk deformation, äfven om $P > 0$, hvilket åtminstone i allmänhet är fallet, så snart $p > 0$, hvilket åter i allmänhet vill säga detsamma som, att evolventen icke är unikursal (evol. och evolut. motsvara hvarandra i regeln entydigt). Omvändt bör i själfva verket meridianen till hvarje yta med någon algebraisk deform. kunna erhållas på det nämnda sättet: när " v -kurvan" har algebraisk båglängd, äro dess evolventer algebraiska.

Exempel på de erhållna resultatens tillämpning.

43. Det enklaste exempel på x -symmetriska " A_1 -kurvor" lämna kurvorna

$$z^{2m} = ax^{2m+1} \quad (m \text{ helt tal} > 0)$$

De äro unikursala, af ordningen och klassen $2m+1$, med en omaka spets (ind. $2m, 2m+1$) i origo samt en omaka, ∞ -linien tangerande, $(1, 2m+1)$ -gren genom $x=w=0$, fig. 72. Beträffande q -kurvornas utseende har man att skilja mellan de fall, då m är udda, och då m är jämt. I förra fallet kommer spetsen i origo att motsvaras af två parabelgrenar med indices $m, m+1$; q -kurvan får deremot en oparig spets (ind. 2, 3), motsvarande de två punkter på f , i hvilka $f'(x) = \pm i x \sqrt{1-k^2}$; vid sammandragning får q det af fig. 73, vid utvidgning det af fig. 74 angifna utseendet. Om m är jämt tal, uppstå deremot af f -spetsen två q -spetsar (ind. $m, m+1$); när $k < 1$, äro dessa reela, och q -kurvan får det useende, som fig. 75 visar. Den oändliga grenen bibehåller i hvarje fall sina indices (§ 25). Att ordning, klass, slägte och följaktligen de Plückerska karaktererna öfver hufvud förblifva oförändrade, inses lätt.

Vrides nu en kurva $z^{2m} = ax^{2m+1}$ t. ex. kring origo en vinkel β mindre än en rät, fortfar den tydligen att vara A -kurva; q bör vid godt. k blifva elem.-transcendent. Men mot k -värdet $\sqrt{1+\cot^2\beta}$ svarar en algebraisk deformation, emedan kurvans enda oändliga gren tangerar ∞ -linien i punkten $z = \pm x \cot \beta$, $w=0$, samt har mindre index udda (§ 24). Den algebraiska kurvans utseende blir olika, allt efter som $\beta \geq 45^\circ$. Är $\beta < 45^\circ$, kommer, om tangenten i A (fig. 76) bildar vinkeln $90^\circ - \beta$ med y -axeln, f -partiet $ADEF$ att motsvaras af imaginära q -punkter, bågen ABC deremot af den symmetriska q -kurvans ena hälft (fig. 77). Om $\beta = 45^\circ$, sammanfaller A med D , och q -spetsen kommer att ligga i origo samt hafva indices $4m, 4m+1$. Är $\beta > 45^\circ$, kommer f -partiet ABC (fig. 78) att ge upphof till halfva den nya kurvan, hvars

utseende fig. 79 visar; spetsen i A' är $(2, 3)$ -punkt, de i D', D'' $(2m, 2m+1)$ -punkter. Den oändliga q -grenen tangerar i hvarje fall ∞ -linien på x -axeln och har indices $1, 2(2m+1)$ (§ 24). Den nya kurvans ordning är dubbelt så stor som den gifnas. Dess klass (= antalet tangenter från x -axelns ∞ -punkt) är, såsom lätt inses, $4m+2+1=2\nu+1$. (ν f -kurvans klass). Släktet är 0, liksom alltid då $P=0$ och f algebraisk (på grund af entydig motsvarighet). Mot den punkt på f , der tangenten är parallel med x -axeln, svara två imaginära inflexioner på q .

Låter man β blifva en rät vinkel, så att f -kurvans ekvation antager formen

$$z^{2m+1} = bx^{2m}, \quad (\text{fig. 80})$$

blir kurvan ånyo A_1 -kurva. De algebraiska q -kurvorna erhålla nu två äne ∞ -linier tangerande $(2, 2m+1)$ -grenar (§ 23), reella då $k < 1$ (fig. 81), imaginära då $k > 1$ (fig. 82). Ordning och klass blifva resp. $2(2m+1)$, $4m$. Vrides en sådan kurva, gående genom $z = \alpha x, w = 0$, en rät vinkel, förblir den A_1 -kurva. Men det meridiansystem, till hvilket den nu hör, innehåller ingen sonderfallande (osymmetrisk) kurva. Funktionen q blir visserligen alltid osymmetrisk vid k -värdet $\sqrt{1+1:\alpha^2}$ ($h=i=j=0$), men någon reel q -kurva erhålles icke, ty om α är reelt, har den vridna kurvan ingen reel tangent med vinkelcoeff. numeriskt större än $1:\alpha$, och om α är imaginärt, är $|\alpha| < 1$, så att $1+1:\alpha^2 < 0$. Vid vridning en spetsig vinkel öfvergå de i fråga varande kurvorna till " B -kurvor" ($P=1$ vid godt k); funktionen q blir likväl algebraisk för k -värdena $\sqrt{1+\alpha_1^2}, \sqrt{1+\alpha_2^2}$ (α_1 och α_2 tangentvinkelcoeff. i ∞ -punkterna); då α är imaginärt, medge de tillhörande ytorna det oaktadt ingen algebraisk deformation, emedan α_1 och α_2 blifva komplexa; när α är reelt, finnas deremot två sådana, så länge vridningsvinkeln är så liten, att kurvan har tangenter med vinkelcoeff. numeriskt större än både α_1 och α_2 (samt hvarken α_1 eller α_2 är 0), men i motsatt fall endast en (eller ingen, om α_1 eller α_2 är 0).

44. Huru förhålla sig med afseende på deformationernas beskaffenhet de ytor, som uppstå vid *kägelsnitt*s rotation?

Ellipser (cirklar) och hyperblar äro alltid B -kurvor, parablar A -kurvor (A_2 -kurv.).

En yta, hvars meridian är en *ellips* med större axeln vinkelrät mot rot-axeln (t. ex. en vanlig afplattad rot-ellipsoid) medger en enstaka elementär-transcendent "sammandragning" med tillhörande k -värde $\sqrt{1-\alpha^2}$, om $\pm \alpha i$ äro asymptoternas vinkelcoefficienter ($h=i=j=q=r=0$; " v -kurvan" blir i detta

fall en cirkel). Om deremot den mindre axeln är vinkelrät mot rot.-axeln (ssm vid afsmalnande rot.-ellipsoider), eller om axlarna ligga snedt till rot.-axeln, finnes ingen elementär deformation, i förra fallet emedan $|\alpha| > 1$, i senare fallet emedan α är komplex; samma förhållande äger rum, då meridianen är en cirkel ($\alpha = \pm 1$). — De af *hyperblar* alstrade ytorna medge deremot i allmänhet en elem. deform. (utvidgning), stundom tvänne, blott undantagsvis ingen. Tvänne dylika fås, om meridianhyperbeln har tangenter med ändl. kontraktspunkter, parallela med rot.-axeln, men ingendera asymptoten är vinkelrät mot den samma (se fig. 83, 84, 85); i ena fallet (fig. 84) behöfva två olika q -kurvor användas; de äro likväl kongruenta på grund af de bägge hyperbeldelarnas kongruens. — Är meridianen en *parabel* med snedt läge till rot.-axeln (fig. 86), erhåller q -kurvan det af fig. 87 angifna utseendet, när $k < 1$. Då $k > 1$, sönderfaller den nya meridianen i delar af två olika q -kurvor, så länge $k < \sqrt{1 + \alpha^2}$, α axels vinkelcoeff. (fig. 88). När $k = \sqrt{1 + \alpha^2}$, försvinner den å fig. prickade kurvan, och man får en algebraisk kurva af 4:de ordningen med en reel spets och två imaginära dubbelpunkter (fig. 89). Växer k ytterligare, erhåller q -kurvan det utseende, som fig. 90 visar. (På hvad sätt f - och q -punkterna i de olika fallen motsvara hvarandra, torde utan svårighet inses).

45. *Tredjegradskurvan* med dubbelpunkt i origo:

$$(z - ax)(z - bx) = z^3$$

är liksom ett godtyckligt kägelsnitt B -kurva; ty den är unikursal och af klassen 4 med en ∞ -linien tangerande inflexion, sål. $h_1 = 2$. Under ett visst vilkor har dock den tillhörande ytan en algebraisk "sammandragning". Meridianen har nämligen två imaginära inflexionstangenter med vinkelkoefficienter $ab : [a + b \pm i\sqrt{3(a^2 + b^2 - ab)}]$. Skola dessa uttryck vara rent imaginära, fordras att $b = -a$; vinkelcoeff. blifva då $\pm ai : \sqrt{3}$. Är nu tillika $a^2 < 3$, ger k -värdet $\sqrt{1 - a^2} : 3$ en algebraisk deform.; ty kurvan $z = u$ sönderfaller i detta fall i osymmetriska delar, hvarför $P = p = 0$, och emedan kurvan tydligen är symmetrisk i afseende på rot.-axeln, uppstår ingen logaritmisk q -singularitet (hvilket senare också kan inses deraf, att u -kurvan får blott en x -oändlig gren). Den algebraiska q -kurvan blir en 3-gradskurva med en ∞ -linien tangerande spets Fig. 91, 92.

Tredjegradskurvan med isolerad punkt i origo

$$z^2 - a^2 x^2 = cz^3$$

har reela inflexioner med tangentvinkelcoeff. $\pm a : \sqrt{3}$, men k -värdet $\sqrt{1+a^2} : 3$ motsvaras ej. af någon elementär deformation, ty alla reela tangenters vinkelcoefficienter äro numeriskt mindre än $a : \sqrt{3}$. Vrides deremot kurvan en rät vinkel, kommer k -värdet $\sqrt{1+3:a^2}$ att gifva en algebr. deform.; den nya kurvan blir en x -symmetrisk 3-gradskurva med vanlig dubbelpunkt; fig. 93, 94. Äfven då kurvan lägges snedt mot rot.-axeln, kunna alg. deformationer fås.

Är tredjegradskurvan af släktet ett

$$y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$$

f -kurva, blir vid godt. $kP=3$, ty $h_1=4$, $q=r=0$; men i enstaka fall, motsvarande kurvans ändliga inflexioner, får man $P=2$. Lägges kurvan på annat sätt i förh. t. rot.-axeln, blir $P=5$ vid godt. k , i enstaka fall 4 eller 3.

46. Fjerdegradskurvan

$$(z^2 + a^2 x^2)^2 - 8a^3 bx^3 - 24abxz^2 + 18b^2(z^2 + a^2 x^2) = 27b^4,$$

som vid substitutionen $ax=x'$ öfvergår till en trespetsig hypocykloid, är af klassen 3 och tangerar ∞ -linien i punkterna $z = \pm iax$, $w=0$. Från en godt. ∞ -punkt kan därför dragas blott en ändlig tangent till kurvan, som alltså är A -kurva. Om $a^2 < 1$, ger $k = \sqrt{1-a^2}$ en algebr. deform. af den tillhörande rot.-ytan; q -kurvan blir en ny 4-gradskurva med två spetsar och en dubbelpunkt. Fig. 95, 96.

Fullständigare behandling af enskilda fall.

47. Den gifna ytans meridian må vara

$$[(2m+1)z]^{2m} = (2mx)^{2m+1} \quad (m \text{ helt, } > 0)$$

(till hvilken form ekv. $z^{2m} = ax^{2m+1}$ alltid kan bringas genom ombyte af längdenhet). Meridianerna till de ytor, på hvilka den gifna låter applicera sig, äro då bestämda af ekv.

$$\xi = kx, \quad \zeta = \int \sqrt{1 - k^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx = \int \sqrt{1 - k^2 + (2mx)^{1/m}} dx.$$

$$\text{Substitueras } 1 - k^2 + (2mx)^{1/m} = \alpha^2,$$

hvarigenom den gifna kurvans koord. blifva uttryckta i parametern α sålunda:

$$2mx = (\alpha^2 + k^2 - 1)^m, \quad (2m+1)z = (\alpha^2 + k^2 - 1)^{1/(2m+1)},$$

erhålles

$$2m\xi = k(\alpha^2 + k^2 - 1)^m$$

$$\begin{aligned}\zeta &= \int \alpha^2 (\alpha^2 + k^2 - 1)^{m-1} d\alpha \\ &= \alpha^3 \left[\frac{(k^2 - 1)^{m-1}}{3} + (m-1)(k^2 - 1)^{m-2} \frac{\alpha^2}{5} + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2} (k^2 - 1)^{m-3} \frac{\alpha^4}{7} \right. \\ &\quad \left. + \dots + (m-1)(k^2 - 1) \frac{\alpha^{2m-4}}{2m-1} + \frac{\alpha^{2m-2}}{2m+1} \right].\end{aligned}$$

Den nya kurvan är således, såsom vi förut visste, alltid algebraisk och af samma gradtal som den gifna. Man verifierar också utan någon svårighet, hvad som ofvan (§ 43) yttrades om dess utseende (fig. 72—75).

48. Vi skola också i det speciella fallet $m = 1$ verifiera, att om den gifna kurvan *vrides* en spetsig vinkel β , k -värdet $\sqrt{1 + \cot^2 \beta} = 1 : \sin \beta$ ger en algebraisk φ -kurva. Vi hafva i detta fall

$$9z^2 = 8x^3$$

och kunna sätta

$$x = \frac{1}{2} \alpha^2, \quad z = \frac{1}{3} \alpha^3, \quad dz = \alpha dx.$$

Om x', z' äro koord. efter vridningen, har man

$$z' = x \cos \beta + z \sin \beta = \frac{1}{2} \alpha^2 \cos \beta + \frac{1}{3} \alpha^3 \sin \beta$$

$$z' = -x \sin \beta + z \cos \beta = \frac{1}{2} \alpha^2 \sin \beta + \frac{1}{3} \alpha^3 \cos \beta$$

$$dz' (\alpha \sin \beta + \cos \beta) = dx' (\alpha \cos \beta - \sin \beta)$$

$$\begin{aligned}\int u dx' &= \int \alpha d\alpha (\alpha \sin \beta + \cos \beta) \sqrt{1 - k^2 + (\alpha \cos \beta - \sin \beta)^2} : (\alpha \sin \beta + \cos \beta)^2 \\ &= \int \alpha d\alpha \sqrt{\alpha^2 (1 - k^2 \sin^2 \beta) - 2k^2 \alpha \sin \beta \cos \beta + 1 - k^2 \cos^2 \beta}.\end{aligned}$$

Denna integral blir logaritmisk för alla k -värden utom $k = 0$, $k = 1$, $k = 1 : \sin \beta$. (Att den blir algebr. för $k = 0$, d. v. s. att kurvan har algebr. båglängd, beror derpå, att den är evoluta till en viss parabel.) I fallet $k = 1 : \sin \beta$ har man

$$\int u dx' = \zeta = \int \alpha d\alpha \sqrt{1 - \cot^2 \beta - 2\alpha \cot \beta}$$

eller efter substitutionen

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta (1 - \cot^2 \beta - \lambda^2)$$

$$\zeta = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \beta \int \lambda^2 (1 - \cot^2 \beta - \lambda^2) d\lambda = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \beta \lambda^3 \left[\frac{1}{3} (1 - \cot^2 \beta) - \frac{1}{5} \lambda^2 \right].$$

För ξ gäller

$$\xi = kx' = \frac{1}{2} k \operatorname{tg}^2 \beta (1 - \cot^2 \beta - \lambda^2)^2 [\cos \beta + \frac{1}{3} \sin \beta \operatorname{tg} \beta (1 - \cot^2 \beta - \lambda^2)].$$

Man ser omedelbart, att den nya kurvan är en 6-gradskurva, som då $\beta \neq 45^\circ$, råkar ξ -axeln med en tangerande spets (ind. 2,3), två ej tangerande ändliga (1,2)-grenar och en ∞ -linien på ξ -axeln tangerande (1,6)-gren, men att då $\beta = 45^\circ$, de tre ändliga grenarna förena sig till en ξ -axeln tangerande spets med indices 4,5. Jfr § 43 fig. 76—79. — Det allmänna uttrycket för $\int u dx$

bekräftar också, att när β blir en rät vinkel, de nya kurvorna återigen blifva algebraiska vid godtyckligt k .

49. En *afplattad rotationsellipsoid* må antagas gifven. Vi vilja fullständigt bestämma de nya rot.-ytor, till hvilka den kan deformeras. Ur ekv.

$$b^2 x^2 + a^2 z^2 = a^2 b^2$$

härledes

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{1 - k^2 + \frac{b^2}{a^2} \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \sqrt{(1 - k^2) \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \frac{k^2 - e^2}{k^2 - 1}\right) : \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} \quad \left(e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right).$$

Bestämmer man, att mot ellipspunkten $x = +a$, $z = 0$ (A fig. 97) skall svara en q -punkt på ξ -axeln, kommer ζ följaktl. att uttryckas som funktion af x sålunda:

$$\zeta = \int_a^x dx \sqrt{(1 - k^2) \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \frac{k^2 - e^2}{k^2 - 1}\right) : \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}.$$

50. Vi antaga nu 1) $k > 1$. Substitueras

$$x = a \nu(1, \kappa, \alpha)^*), \quad \kappa = \sqrt{1 - e^2} : (k^2 - e^2),$$

får man

$$\zeta = \pm a \kappa \sqrt{1 - e^2} \int_0^\alpha \mu^2(\alpha) d\alpha^{**}).$$

Men integralen till höger i denna ekv. kan medelst de s. k. θ -funktionerna ***) evalueras sålunda:

*) $\lambda(\alpha)$, $\mu(\alpha)$, $\nu(\alpha)$ beteckna resp. $\sin \operatorname{am} \alpha$, $\cos \operatorname{am} \alpha$, $\Delta \operatorname{am} \alpha$.

**) Med $\sqrt{1 - e^2}$ mena vi som vanligt den positiva roten; då under ett rotmärke står en *variabel* kvantitet, tänka vi oss ej någon dylik inskränkning.

***) I likhet med *Briot et Bouquet* i arbetet "Theorie des fonctions doublement périodiques" (Paris 1859), skrifva vi

$$\theta(\alpha) = \prod_{n=0}^{\infty} \left[1 - \sin^2 \frac{2\pi\alpha}{\omega} : \cos^2 (2n+1) \pi \frac{\omega'}{\omega} \right] = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega}} \left[1 + \sum_1^{\infty} q^{n^2} \cos \frac{4n\pi\alpha}{\omega} \right],$$

$$\theta_1(\alpha) = \prod_0^{\infty} \left[1 - \sin^2 \frac{1\pi\alpha}{\omega} : \sin^2 (2n+1) \pi \frac{\omega'}{\omega} \right] = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega'}} \left[1 + \sum_1^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos \frac{4n\pi\alpha}{\omega} \right],$$

(nämnda arb. pag. 149, 175), hvarest ω, ω' betyda resp. $4 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}}$ och

$2 \int_1^{\kappa} \frac{dx}{\sqrt{-(1-x^2)(1-\kappa^2 x^2)}}$, integrationerna utförda med de positiva radikalvärdena, samt

$\kappa' = \sqrt{1 - \kappa^2}$, $q = e^{2\pi i \omega' : \omega}$. — ω, ω' äro perioder för λ ; $\omega, \frac{1}{2}\omega + \omega'$ för μ ; $\frac{1}{2}\omega, 2\omega'$ för ν . — Se för öfrigt det nämnda arb. pag. 187 samt pag. 166, enl. hv. $\theta_1''(0) = \theta''(0) + \kappa^2$.

$$\int_0^{\alpha} \mu^2(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\kappa^2} \left[\frac{\theta_1'(\alpha)}{\theta_1(\alpha)} - \alpha \theta''(0) \right].$$

Den nya meridianen kommer således att bestämmas af ekv.

$$\xi = a\kappa\nu(\alpha), \zeta = + \frac{a\sqrt{1-e^2}}{\kappa} \left[\frac{\theta_1'(\alpha)}{\theta_1(\alpha)} - \alpha \theta''(0) \right].$$

För $\frac{d\zeta}{d\xi}$ gäller uttrycket $\mp \frac{\sqrt{1-e^2}\mu(\alpha)}{k\kappa\lambda(\alpha)}$.

Vid ellipsen har man deremot

$$x = a\nu(\alpha), z = \pm b\kappa\lambda(\alpha), \frac{dz}{dx} \mp \frac{b}{\kappa a\lambda(\alpha)} \nu(\alpha).$$

Hvilka punkter af de bägge kurvorna motsvara nu olika α -värden? Mot $\alpha=0$ svarar på ellipsen vertex A (fig. 97). Om i z -uttrycket det öfre tecknet väljes, har man vidare, när α växer från 0 till $\frac{1}{4}\omega$ (se noten) att genomlöpa en viss båge AB ofvanom x -axeln; när α ytterligare växer, samma båge tillbaka, vid $\alpha:s$ växande från $\frac{1}{4}\omega$ till $\frac{3}{4}\omega$ och ω en motsvarande båge AH nedanom x -axeln fram och tillbaka, derpå åter AB o. s. v.; när α går från 0 åt negativa hållet, har man på samma sätt att tillryggalägga $AHABA$ o. s. v. På q -kurvan svarar, om äfven för ζ det öfre tecknet tages, mot α -värden mellan 0 och $\frac{1}{4}\omega$ liksom vid ellipsen en båge $A'B'$ ofvanom ξ -axeln, men när α går från $\frac{1}{4}\omega$ till $\frac{1}{2}\omega$, uppstår en ny båge $B'A'_1$, kongruent med $B'A'$, och symmetrisk till denna med afseende på tangenten i B' som är parallel med ξ -axeln; när vidare $\frac{1}{2}\omega < \alpha < \omega$, fås ett nytt q -parti, tvåtydigt motsvarande ellipsbågen AH , ökas α än vidare, erhållas åter två bågar motsvarande AB o. s. v. i oändlighet; på samma sätt åt negativa hållet; se fig. 98. På grund af bågarernas AB och AH kongruens kunna naturligtvis de mot hvardera svarande q -bågarna utbytas mot hvarandra (hvilket analytiskt verkställes så, att för z och ζ tagas olika tecken, eller som nedre integrationsgräns sättes $\frac{1}{2}\omega$ eller udda mångfald deraf i st. f. 0). Afståndet mellan två konsekutiva q -spetsar, d. v. s. den reela perioden för ξ som funktion af ζ är $— a\sqrt{1-e^2}\omega\theta''(0):2\kappa$.

Till de icke på bågen BAH belägna ellipsoidpunkterna höra inga reela α -värden. För att få fram hela ellipsen måste man låta α i sitt plan genomlöpa t. ex. rektangeln $ABCDEF$ fig. 99 ($AB=AF=\omega$, $BC=\omega:i$). Deremot gifva inga imaginära α -värden upphof till reela q -punkter. Men alldenstund det gäller att

$$\frac{\theta_1'(\alpha + \omega')}{\theta_1(\alpha + \omega')} = \frac{\theta_1'(\alpha)}{\theta_1(\alpha)} - \frac{4\pi i}{\omega}$$

(Briot et Bouquet p. 164), kommer, när α genomlöper sidan CDE af rektangeln, den imaginära termen i ζ att bibehålla samma värde, näml.

$$+ \frac{a}{x} \sqrt{1-e^2} \left[\frac{4\pi}{\omega} + \frac{\omega}{i} \theta''(o) \right] i$$

= halfva den imaginära perioden för ξ som punkt af ζ . Förskjuter man därför g -kurvan längs rot.-axeln ett imaginärt stycke = nämnda halfva period (eller udda mångfald deraf), d. v. s. ändrar nedre integrationsgränsen från 0 till $(2m+1)\omega'$ (eller i den ursprungl. integr. från a till $-a$), erhålles en ny, med den förra kongruent kurva, svarande mot den med ellipsbågen BAH kongruenta bågen DEF . Det nya ζ -uttrycket blir, om $m=0$,

$$\zeta = \frac{a}{x} \sqrt{1-e^2} \left[\frac{\theta_1'(\alpha)}{\theta_1(\alpha)} + \frac{4\pi i}{\omega} - (\alpha - \omega') \theta''(o) \right].$$

Det är för öfrigt tydligt, att på grund af de båda g -kurvornas symmetriska läge till rot.-axeln, endast den ena är behöflig för den nya ytans genererande, liksom ellipsoiden alstras redan af halfva ellipsen. Annat blefve naturligtvis förhållandet, om meridianellipsen, och därför också g -kurvorna förskötes vinkelrätt mot rot.-axeeln.

51. Antagom nu 2) $1 > k > e$. Sätter man

$$x = a \mu(1, x, a), \quad x = \sqrt{k^2 - e^2} : (1 - e^2),$$

erhålles (om de dubbla tecknen bortlämnas)

$$\xi = ak\mu(\alpha), \quad \zeta = a \sqrt{1-e^2} \int_0^\alpha \nu^2(\alpha) d\alpha = b \left[\frac{\theta_1'(\alpha)}{\theta_1(\alpha)} + \alpha(1 - \theta_1''(o)) \right], \quad \frac{dz}{d\xi} = - \frac{\sqrt{1-e^2} \nu(\alpha)}{k \lambda(\alpha)}.$$

För ellipsen gäller

$$x = a \mu(\alpha), \quad z = b \lambda(\alpha), \quad \frac{dz}{dx} = - \frac{b}{a} \frac{\mu(\alpha)}{\lambda(\alpha)}.$$

α -värdena mellan 0 och $\frac{1}{4}\omega$, $\frac{1}{4}\omega$ och $\frac{1}{2}\omega$, $\frac{1}{2}\omega$ och $\frac{3}{4}\omega$, $\frac{3}{4}\omega$ och ω gifva resp. ellipsbågarna AC , CE , EG , GA och å andra sidan g -bågarna $A'C'$, $C'E'$, $E'G'$, $G'A$, (fig. 100). När α går från ω till $+\infty$, eller från 0 till $-\infty$, återfås ellipsen oändligt många gånger, medan å andra sidan bildas en periodisk g -kurva; perioden ($C'C_1'$) är $4b \frac{1}{4}\omega [1 - \theta_1''(o)]$.

52. 3) Om $k=e (= \sqrt{1-b^2:a^2})$, erhålles, såsom kunnat förutses (§ 44), en elementär g -yta. Man har att i de § 51 erhållna resultaten för $\lambda(\alpha)$, $\mu(\alpha)$, $\nu(\alpha)$, ω sätta resp. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, 1, 2π , och g -kurvan blir

$$\xi = ak \cos(\zeta : b),$$

samt perioden $4b \cdot \frac{1}{2} \pi$.

53. 4) Slutligen må $k < e$. Vi erhålla efter att hafva satt

$$\begin{aligned} x &= \lambda(1, z, \alpha), & z &= \sqrt{(e^2 - k^2) : (1 - k^2)}, \\ \zeta &= a \sqrt{1 - k^2} \int_{\frac{1}{2}\omega}^{\alpha} \nu^2(\alpha) d\alpha = b \sqrt{\frac{1 - k^2}{1 - e^2}} \left[\int_0^{\alpha} \nu^2(\alpha) d\alpha - \int_0^{\frac{1}{2}\omega} \nu^2(\alpha) d\alpha \right] \\ &= b \sqrt{\frac{1 - k^2}{1 - e^2}} \left[\frac{\theta_1'(\alpha)}{\theta_1(\alpha)} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\omega \right) (1 - \theta_1''(0)) \right], \\ \xi &= ak \lambda(\alpha), \quad \frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{1}{k} \sqrt{1 - k^2} \frac{\nu(\alpha)}{u(\alpha)}. \end{aligned}$$

För ellipsen fås

$$x = a \lambda(\alpha), \quad z = -b \mu(\alpha), \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\lambda(\alpha)}{\mu(\alpha)}.$$

Saken gestaltar sig ungefär på samma sätt som i fallet 2), likväl med den skilnad, att mot ellipsvertices A, C, E, G nu svara resp. α -värdena $\frac{1}{2}\omega, \frac{1}{4}\omega, \frac{3}{4}\omega, \omega$. Den reela perioden blir $4b \cdot \frac{1}{2}\omega [1 - \theta_1''(0)] \sqrt{(1 - k^2) : (1 - e^2)}$; gränsvärdet härför, då k går mot 0, d. v. s. $\lim_{k \rightarrow 0} a\omega [1 - \theta_1''(0)]$ för $z = e$ är ellipsperiferiens längd. — Man kan a priori inse, att den erhållna q -kurvan vid en viss imaginär förskjutning längs z -axeln måste öfvergå till en mot *imaginära ellipspunkter* svarande reel kurva. Ty för $x = a \sqrt{(1 - k^2) : (1 - e^2)}$ är

$$-\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} \frac{x^2}{x^2 - a^2} = 1 - k^2,$$

och för större x mindre, så att $q'(x)$ är reelt. Man finner också, att om, som nedre integrationsgräns i st. f. $\frac{1}{2}\omega$ sättes $\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega'$, d. v. s. om kurvan förskjutes ett imag. stycke = halfva den imaginära perioden, en ny reel kurva framkommer. Det nya uttrycket blir

$$\zeta = b \sqrt{\frac{1 - k^2}{1 - e^2}} \left[\frac{\theta_1'(\alpha)}{\theta_1(\alpha)} + \frac{2\pi i}{\omega} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}\omega' \right) (1 - \theta_1''(0)) \right].$$

Kurvan består af en oändlig mängd kongruenta delar af det utseende, som fig. 101 visar, och liggande ömsom på positiva och negativa sidan om z -axeln. Spetsabscissorna äro $\pm ak \sqrt{(1 - k^2) : (1 - e^2)}$, asymptotvinkelkoeff. $\pm \sqrt{e^2 - k^2} : k$. Mot spetsen K svarar $\alpha = \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{2}\omega'$, mot den oändl. punkten L $\alpha = \frac{1}{2}(\omega + \omega')$ och i allm. mot spets $\alpha = \frac{1}{2}\omega' + \frac{1}{2}(2m+1)\omega$, mot ∞ -punkt $\alpha = \frac{1}{2}\omega' + \frac{1}{2}m\omega$ (m helt). Att tangenterna i de oändlige punkterna, såsom vi på förhand kunna veta, verkligen blifva ändliga, kan, om man så vill, verifieras så, att man söker

gränsvärdet, när α går mot $\frac{1}{4}(\omega + \omega')$, för det stycke, som tangenten afskär af z -axeln; man finner, att detta gränsvärde (OS) är ändligt och $=\frac{1}{4}$ af den reela perioden.

54. *Sifferexempel.* Under antagande att $e = \frac{1}{2}$ (hv. ungef. är fallet fig. 97), vilja vi beräkna den reela q -perioden (R) för k -värdena $2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$. Härvid skola följande formler användas:

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots)^2, \\ \theta''(o) &= \sqrt{2048\pi^5 : \omega^5}(q + 4q^4 + 9q^9 + \dots), \\ \theta_1''(o) &= \sqrt{2048\pi^5 : \omega'^5}(q - 4q^4 + 9q^9 + \dots), \\ q &= \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{16}v^6 + \frac{1}{512}v^{10} + \frac{1}{2048}v^{14} + \dots,\end{aligned}$$

hvaräst

$$\omega' = \sqrt{1 - \omega'^2}, v^2 = (1 - \omega') : (1 + \omega').^1)$$

55. Om nu a) $k = 2$, blir $\omega = \sqrt{(k^2 - e^2)} : (k^2 - e^2) = \sqrt{0,2}$, och man har (§ 50)

$$R = -\frac{1}{4}a\sqrt{1 - e^2}\omega\theta''(o) : \omega = a\sqrt{1920\pi^5 : \omega^3}(q + 4q^4 + \dots).$$

Vidare är $v^2 = 9 - \sqrt{80} = 0,0557280900$, $q = 0,0139320225 + 0,0000108169 + 0,0000000178 = 0,013942857$, $1 + 2q + 2q^4 = 1,0278858$, $\log \omega = \log 2\pi + 2\log(1 + 2q + 2q^4) = 0,7981799 + 0,0238898 = 0,8220697$, $q + 4q^4 = 0,013943008$; följaktligen är $\log(R:a) = \frac{1}{2}\log 1920 + \frac{5}{2}\log \pi + \log(q + 4q^4) - \frac{3}{2}\log \omega = 1,6416506 + 1,2428746 + 0,1443564 - 2 - 1,2331045 = 0,795777 - 1$, $R = 0,62485a$. — R är afståndet mellan B' och H' fig. 98; afståndet mln de motsvarande ellipspunkterna är (§ 50) $BH = 2b\pi\lambda(\frac{1}{4}\omega) = \frac{1}{10}a\sqrt{60} = 0,77460a$. Det förhållande, hvori detta afstånd vid deform. minskats, är $0,80668$.

56. När b) $k = \frac{3}{2}$, blir $\omega = \sqrt{(k^2 - e^2)} : (1 - e^2) = \frac{1}{6}\sqrt{15}$, $\omega' = \frac{1}{6}\sqrt{21}$ och

$$R = 4b[\frac{1}{4}\omega - \sqrt{768\pi^5 : \omega^3}\sqrt{21}(q - 4q^4 + \dots)].$$

Vidare får man $v^2 = \frac{1}{6}(19 - \sqrt{336}) = 0,133939440$, $q = 0,0334848610 + 0,0001501776 + 0,0000014313 + 0,0000000169 = 0,033636487$, $1 + 2q + 2q^4 = 1,0672755$, $q - 4q^4 = 0,033631367$, $\log \omega = \log 2\pi + 2\log(1 + 2q + 2q^4) = 0,7981799 + 0,0565527 = 0,8547326$, $\frac{1}{4}\omega = 1,789256$; $\log(\frac{1}{4}\omega - R : 4b) = \frac{1}{2}\log 768 + \frac{5}{2}\log \pi + \log(q - 4q^4) - \frac{3}{2}\log \omega - \frac{1}{4}\log 21 = 1,4426806 + 1,2428746 + 0,5267445 - 2 - 1,2820989 - 0,3305548 = 0,5996460 - 1$, $R : 4b = 1,789256 - 0,397783 = 1,39147$. — $\frac{1}{4}R = OC_1$ fig. 102.

57. c) För $k = \frac{1}{2}$ har man $R = \frac{1}{2}\pi$. $4b = 1,570796$. $4b - \frac{1}{4}R = OC_{11}$ fig. 102.

¹⁾ Formeln för ω återfinnes hos Briot et Bouquet, anf. arb. pag. 175; uttrycken för $\theta''(o)$ och $\theta_1''(o)$ fås genom derivering af serierna för θ och θ_1 på samma ställe, formeln för q är hemtat från BERTRAND, Calcul Intégral pag. 683 ($v^2 = tg^2 \frac{1}{2} \Theta$, om $\omega = \sin \Theta$).

58. d) Är slutl. $k = \frac{1}{4}$, blir liksom i a) $x = \sqrt{0,2}$; äfven q och ω få således samma värden som der. För R gäller nu

$$R = 4b \left[\frac{1}{8} \omega \sqrt{5} - \sqrt{80\pi^5 \sqrt{5} : \omega^3 (q - 4q^4 + \dots)} \right].$$

Man finner $\log \omega + \frac{1}{2} \log 5 - \log 8 = 0,2684647$, $\frac{1}{8} \omega \sqrt{5} = 1,855516$; $q - 4q^4 = 0,013942706$, $\frac{1}{2} \log 80 + \frac{5}{2} \log \pi + \log (q - 4q^4) + \frac{1}{4} \log 5 - \frac{3}{2} \log \omega = 0,2804046 - 1$, $R : 4b = 1,855516 - 0,190724 = 1,66479$. — $\frac{1}{4} R = OC_{111}$ fig. 192. — Gränsvärdet för R , när k går mot 0, d. v. s. ellipsperiferien är $P = \frac{1}{8} \sqrt{12} \cdot \frac{1}{4} \omega [1 - \theta_1''(0)]$. $4b = \frac{1}{8} \sqrt{12} \zeta$. $4b$ för $x = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$. Enligt en hos Bertrand (pag. 714) befintlig tabell är $\log \zeta = 0,1665669$, när vinkeln $\theta = 30^\circ$. [B :s ω är $\frac{1}{4}$ af vårt.] Man finner på grund häraf lätt $P : 4b = 1,6945$.

59. För att kunna fullständigare konstruera den nya kurvan, har man att beräkna ξ och ζ för en lämplig följd af α -värden. Antagom t. ex. att ellipsens större halfaxel (a) är 50 mm (OA fig. 103), samt för enkelhets skull $k = \frac{1}{2}$, så att q -kurvan är elementär. Man har då $\xi = ak \cos \alpha$, $\zeta = a\sqrt{1 - e^2} \pi g : 180$, om $\alpha = g$ grader; d. v. s. $\xi = 25 \cos \alpha$, $\zeta = \frac{1}{36} \pi g \sqrt{75}$. För g -värdena 0, 12, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 81, 84, 90 erhålles med lätthet följande värden

för ξ : 25; 24,4; 22,8; 21,6; 20,2; 18,6; 16,7; 14,7; 12,5; 10,2; 7,7; 5,2; 3,9; 2,6; 0;

för ζ : 0; 9,1; 18,1; 22,7; 27,2; 31,7; 36,3; 40,8; 45,3; 49,9; 54,4; 58,9; 61,2; 63,5; 68,0.

Punkterna B', C', D', E', F', G' fig. 103 svara resp. mot g -värdena 24, 36, 48, 60, 72, 90. Å fig. angifves äfven läget af de ellipspunkter, som motsvara vissa q -punkter; man har för ellipsen $x = 50 \cos \alpha$, $z = 25 \sqrt{3} \sin \alpha$. Vinkeln mellan q -tangentsen i G' och z -axeln är $\arccot \frac{1}{2} \sqrt{3} = 30^\circ$. — Vid annat k -värde har man för beräkning af ζ att använda approximativa uttryck för $\theta_1' : \theta_1$. En serie för denna funktion återfinnes t. ex. hos Bertrand pag. 694 (hans Θ skiljer sig på en konst. faktor från θ_1 , så att $\Theta' : \Theta = \theta_1' : \theta_1$; hans q är 'detsamma som vårt, hans ω $\frac{1}{4}$ af vårt).

Om rotationsytor med konstant krökningsmått.

60. Två ytor med samma konstanta krökningsmått kunna som bekant alltid appliceras på hvarandra på oändligt många sätt, i viss mening "huru som helst". Äro ytorna rotationsytor, är det af intresse att utröna, huruvida de alltid kunna läggas på hvarandra på det sätt, som vid rot.-ytor i allmänhet är det enda tänkbara, nämligen med meridian på meridian. Vi skola tillse, huru

härmed förhåller sig, och på samma gång göra oss reda för de i fråga varande ytornas analytiska representation och allmänna utseende ¹⁾.

61. En rot.-ytas principale krökningsradier äro meridianens krökn.-radie (R) samt det stycke (N) af meridian-normalen, som ligger mellan kurvan och rot.-axeln. Krökningsmåttet är således $\pm 1 : RN$. Men R och N hafva värdena $\pm \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} : \frac{d^2x}{dz^2}$ och $\pm x \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$. Krökn.-måttet är alltså, med reservation för tecknet, $\frac{d^2x}{dz^2} : x \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 \right]^2$. Vidare är krökn.-måttet positivt eller negativt, allt efter som kurvan är konkav eller konvex emot rot.-axeln, d. v. s. allt efter som $\frac{1}{x} \frac{d^2x}{dz^2} < 0$ eller > 0 ; framför det uppskrifna uttrycket bör således sättas tecknet $---$. För rot.-ytor med konstant krökn.-mått ($\pm 1 : a^2$) gäller alltså diff.-ekv.

$$\frac{d^2x}{dz^2} : \left[1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 \right]^2 = \mp \frac{x}{a^2}.$$

Genom en första integration fås härur med lätthet

$$dz = dx \sqrt{(-x^2 - C) : (x^2 + C \mp a^2)}.$$

Denna ekv. representerar alla rot.-ytor, på hvilka en rot.-yta med krökn.-måttet $\pm 1 : a^2$ kan appliceras, sål. äfven dem, på hvilka den kan läggas med meridian på meridian. Men den ekv., som bestämmer sistnämnda ytor, är ju, liksom den nyss härledda, en diff.-ekv. af första ordningen med en arbiträr konstant (k). De bägge ekvationerna böra därför vid någon viss relation mellan C och k blifva fullkomligt lika, och således representera samma ytsystem. Här af följer likväl icke, att hvarje system rot.-ytor med samma konstanta krökn.-mått bildar ett ytsystem af det slag, som vi i det föregående lärt känna: det är nämligen tänkbart, att reela ytor kunna motsvara *imaginära* k -värden. Vi skola närmare undersöka denna sak.

62. Antagom för det första, att för a^2 gäller det öfre tecknet, d. v. s. att krökn.-måttet är *positivt*. Den erhållna ekv. representerar då: en *sfer* med radien a samt alla de rot.-ytor, på hvilka den kan appliceras. För att finna de rot.-ytor, på hvilka sferen kan läggas med storenkel på meridian, hafva vi endast att sätta $e = 0$ i hufvudformeln vid undersökningen af ellipsoid-deformationerna (§ 49).

¹⁾ Prof. BJÖRLING har vid sina offentl. föreläsningar redogjort för sistnämnda frågor; i tryck är mig ingen nöjaktig utredning af saken bekant.

Man erhåller

$$\frac{d\xi}{d\xi} = \frac{1}{k} \frac{d\xi}{dx} = \sqrt{[-\xi^2 - a^2(1-k^2)] : (\xi^2 - a^2 k^2)}.$$

Denna ekv. blir identisk med den § 61 härledda, om man sätter $a^2(1-k^2) = C$. Vidare måste C , om reela ytor skola erhållas, ligga mellan gränserna $-\infty$ och $+a^2$, och för hvarje C -värde mellan dessa gränser är k reellt. Här af följer, att det icke gifves några rot-ytor, på hvilka en sfer kan appliceras annorlunda än med storcirkel på meridian. Derför kunna också två transcendenta rot-ytor med samma konstanta positiva krökningsmått alltid åtminstone delvis läggas på hvarandra med meridian på meridian (fullständigt endast om för bägge $k < 1$, sål. $C > 0$, jfr fig. 98, 100).

63. För att medelst θ -funktionerna representera meridianerna till de i fråga varande ytorna har man endast att i fallen 1) och 2) vid ellipsoid-deform. (§ 50, 51) sätta $e = 0$. I förra fallet ($k > 1$, $C < 0$) får man

$$x = ak \nu(\alpha), z = ak \left[\frac{\theta_1'(\alpha)}{\theta_1(\alpha)} - \alpha \theta''(0) \right] \quad (\alpha = 1 : k),$$

i senare fallet ($k < 1$, $C < 0$)

$$x = ak \mu(\alpha), z = a \left[\frac{\theta_1'(\alpha)}{\theta_1(\alpha)} + \alpha (1 - \theta_1''(0)) \right] \quad (\alpha = k).$$

Det allmänna utseendet är i de bägge fallen det af fig. 100 och fig. 98 angifna; den reela perioden är $-\frac{1}{2} ak \omega \theta''(0)$ resp. $a \omega (1 - \theta_1''(0))$.

64. Vi antaga nu det konstanta krökningsmåttet negativt. Konstanten C måste då vara negativ för att ge reela ytor; vi sätta $C = -b^2$ och hafva sål.

$$dz = dx \sqrt{(b^2 - x^2) : (x^2 + a^2 - b^2)}.$$

65. Är 1) $b^2 - a^2$, ger denna ekv. en elem.-transcendent kurva, näml. en "Huyghens' traktor" med z -axeln till asymptot; man får näml.

$$dz = \frac{dx}{x} \sqrt{b^2 - x^2}, \quad z = \sqrt{b^2 - x^2} + b \log \frac{b - \sqrt{b^2 - x^2}}{b + \sqrt{b^2 - x^2}}$$

(om integr.-konstanten väljes så, att kurvan blir symmetrisk i afseende på x -axeln). Se fig. 104, kurvan med spets i A .

66. Om 2) $b^2 < a^2$, sätta vi

$$x = b \mu(1 : \alpha), \quad z = b : a \quad (b > 0, a > 0),$$

och erhålla, om vi mot $\alpha = 0$ låta svara $z = 0$,

$$z = \frac{b^2}{a} \int_0^\alpha \lambda^2(\alpha) d\alpha = a \left[\alpha \theta_1''(0) - \frac{\theta_1'(\alpha)}{\theta_1(\alpha)} \right], \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{b \lambda(\alpha)}{a u(\alpha)}.$$

Mot α -värdet 0 svarar punkten $x=b$, $z=0$ (B fig. 104), hvarest kurvan tydligen har en x -axeln tangerande spets. Då α växer till $\frac{1}{2}\omega$, minskas x från b till 0, hvaremot z växer till $\frac{1}{2}a\omega\theta_1''(0)$, stycket OC på fig.; tangentvinkelcoeff. i C är $-b:\sqrt{a^2-b^2}$. Ju mindre b är, desto större är den spetsiga vinkeln mellan z -axeln och tangenten i C ; för $b=a$ är den 0° (traktorian); dess gränsvärde, då b närmar sig 0, är 90° ; de motsvarande gränsvärdena för längden OC äro ∞ och 0. I C har kurvan tydligen inflexion och fortsätter derpå med kongruenta bågar; såsom fig. visar; på samma sätt nedanom x -axeln. — Vi hafva $OC = \frac{1}{2}a\omega\theta_1''(\theta) = a(\frac{1}{2}\omega - \zeta)$ (se § 58). När $\alpha = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$, d. v. s. $b = \frac{1}{2}a$ ($OB = \frac{1}{2}OA$), är enl. Bertands tabell $\log \zeta = 0,1665669$ och $\log \frac{1}{2}\omega = 0,2267933$, sål. $OC = (1,6867 - 1,4675)a = 0,219a$.

67. Om slutligen 3) $b^2 > a^2$, substituera vi

$$x = b \nu(1, \alpha, \alpha) \quad \alpha = a : b$$

och erhålla

$$z = \frac{a^2}{b} \int_0^\alpha \lambda^2(\alpha) d\alpha = b \left[\alpha \theta_1''(0) - \frac{\theta_1'(\alpha)}{\theta_1(\alpha)} \right], \frac{dx}{dz} = - \frac{\lambda(\alpha)}{\mu(\alpha)}.$$

α -värden från 0 till $\frac{1}{2}\omega$ gifva nu x -värden från b till $b\alpha' = \sqrt{b^2 - a^2}$, z -värden från 0 till $\frac{1}{2}b\omega\theta_1''(0)$ samt värden på tang.-vinkelcoeff. från 0 till $-\infty$, och det uppstår en båge af utseendet DE fig. 104; öfriga α gifva samma x -värden och kongruenta bågar, såsom fig. visar. Den reela perioden är $\frac{1}{2}b\omega\theta_1''(0)$; dess gränsvärden, då b går mot 0, äro resp. ∞ och 0; då $b = 2a$ ($\alpha = \frac{1}{2}$), är den $0,877a$ (se föreg. §).

68. En blick på figuren visar, att de mot $b < a$ svarande ytorna icke kunna appliceras på dem, som svara mot $b > a$, på sådant sätt, att meridian faller på meridian. Låtom oss i själfva verket tillse, på hvilka ytor en godt. vald yta i systemet kan läggas på nämnda sätt. Dessa ytor äro de som vid reelt k representera ekv.

$$\frac{d\zeta}{d\xi} = \frac{1}{k} \sqrt{1 - k^2 + \frac{b^2 - x^2}{x^2 + a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - k^2(a^2 - b^2) - \xi^2}{\xi^2 + k^2(a^2 - b^2)}} = \sqrt{\frac{b_1^2 - \xi^2}{\xi^2 + a^2 - b_1^2}},$$

om $b_1^2 = a^2 - k^2(a^2 - b^2)$.¹⁾ Denna ekv. har visserligen alldeles samma form som den, från hvilken vi utgingo. Men mot ett gifvet, reelt värde på konstanten b (som ju måste vara reel vid en reel yta) kan icke svara hvilket reelt

¹⁾ Naturligtvis bör man gen. att här ändra tecken för a^2 samt insätta C för $-b^2$, C' för $-b_1^2$, komma till samma resultat betr. ytor med positivt krökn.-mått, som förut härledts med sferen ($C=0$) såsom utgångspunkt.

värde som helst på b_1 , såvida k skall vara reelt. Om $b^2 < a^2$, så genomlöper b_1^2 alla värden mellan a^2 och 0, när k^2 varierar från 0 till $a^2 : (a^2 - b^2)$. Är deremot $b^2 > a^2$, antager b_1^2 alla värden mellan a^2 och ∞ , när k går från 0 till ∞ . Är $b^2 = a^2$, får man oberoende af k samma yta, från hvilken man utgick, och denna har tillika den egenskapen att motsvara k -värdet 0, då man utgår från en yta med $b^2 > a^2$. Hvarje system rot.-ytor med samma negativa krökningsmått sönderfalla således i två skilda system af ytor, som (delvis) låta applicera sig på hvarandra med meridian på meridian; på gränsen mellan båda står en elementär yta, som ensam kan sägas bilda ett system af sist nämnda slag, enär en böjning med bibehållna meridianer icke innebär bildandet af någon ny yta, utan den gifnas förskjutning på sig själf (jfr traktorians kända egenskap att hafva "konstant tangent" samt en § 10 bevisad sats). Endast genom att gifva konstanten k imaginära värden kommer man öfver från systemet $b^2 > a^2$ till systemet $b^2 < a^2$ och omvänt.

69. Det bör slutligen icke lämnas oanmärkt, att en rot.-yta med konstant krökn.-mått alltid kan läggas på en annan rot.-yta med samma krökn.-mått så, att två *enstaka meridianer sammanfalla*. Meridianerna äro näml. *geodetiska linier*, och två dylika hvilka som helst kunna, såsom ganska lätt inses, alltid fås att sammanfalla, när ytor med konstant krökn.-mått appliceras på hvarandra. Kurvorna kunna t. o. m. läggas på hvarandra huru som helst, eller den ena ytan kan förskjutas på den andra s. a. s. parallelt med en godtycklig geodetisk linie. Enligt hvad vi förut sett kan det i vårt särskilda fall vid den ena rot.-ytans förskjutning på den andra längs de hvarandra täckande meridianerna i enstaka ögonblick inträffa, att *samtliga* de ursprunglige meridianerna på den deformerade ytan komma att åtminstone delvis åter uppträda som meridianer.





